… schaften
in un … nt wird,
wohl … reitung
der l … Labora-
torien … ndenen
Einric … tes der
Wisse … hoch-
steher … Mangel
hinwe … ftlichen
Ausbi … es das
Fehl … el an
Kenr … n das
Geb …

… siker
der e … dlicher
Form … ndlun-
gen d … Lehren-
den u … dadurch
ein U … dringen
in di … lbe ist
aber … Denn
in jen … welche
inzwis … sondern
es rul … er Ent-
wickl … en und
Forsc … dgrube
von A …

… sollen
ihrem … von der
Mathe … andlungen
aus de … k, Chemie
(einsc … nthalten.

… ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig).

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 2. **C. F. Gauss**, Allg. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. (1840.) Herausgeg. v. A. Wangerin. (60 S.) ℳ —.80.

Nr. 5. **C. F. Gauss**, Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. Zweite revidirte Auflage. (64 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss**, Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais**, Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 54. **J. H. Lambert**, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausgeg. von A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) ℳ 1.60.

» 55. **Lagrange** u. **Gauss**, Abhandlungen über Kartenprojection. (1779 und 1822.) Herausgeg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{(m\cdot m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot\cdot$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

Nr. 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) ℳ 2.—.

» 83. —— —— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777). Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ. 1.20.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 111. **N. H. Abel**, Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

» 116. **Lejeune Dirichlet**, Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) und **Philipp Ludwig Seidel**, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen (1847). Herausgegeben von Heinrich Siebmann. (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge**, Darstellende Geometrie (1798). Übersetzt und herausgegeben von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren in dem Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss**, Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadratische Reste. Herausgegeben von Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner**, Einige geometrische Betrachtungen (1826). Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier**, Die Auflösung der bestimmten Gleichungen. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) ℳ 4.—.

» 129. **Johann Friedrich Pfaff**, Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren (1815). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.40.

Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen zu integriren.

Von

Johann Friedrich Pfaff.

(1815.)

Aus dem Lateinischen übersetzt

und

herausgegeben

von

Gerhard Kowalewski.

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1902.



[76] Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen und gewöhnliche Differentialgleichungen, beide von erster Ordnung, in beliebig vielen Veränderlichen, vollständig zu integriren.

Von

J. F. Pfaff.*)

(Abhandlungen der kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Aus den Jahren 1814—1815.)

Zu den hervorragenden Erfindungen, durch welche der scharfsinnige *Lagrange* die Analysis bereichert hat, gehört eine allgemeine Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen [1]. Es war keineswegs leicht, eine solche Integration ausfindig zu machen, was man schon daraus ersehen kann, dass ein so gewiegter Meister des Calculs wie *Euler* bei seiner ausführlichen Behandlung dieser Gleichungen (Calc. Integr. Vol. III, p. 37—178) nur die Lösung specieller Fälle gegeben hat, und zwar nicht nach einem gleichförmigen Verfahren, sondern mit Benutzung verschiedenartiger Kunstgriffe. Er gesteht selbst (p. 132), »dass er von der Lösung des allgemeinen Problems noch weit entfernt sei«. Während sich nun *Euler* keinen hinreichend allgemeinen Begriff von der wahren Natur dieser Gleichungen gebildet zu haben scheint, gewann *Lagrange* seine Methode dadurch, dass er dieselben nach einem gleichförmigen und allgemeinen Princip betrachtete. Es sei z eine Function der Veränderlichen x

*) In der Sitzung der Akademie am 11. Mai 1815 vorgelegt unter dem Titel: »Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi.

und y, ferner sei $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Dann ist allgemein bekannt, dass eine partielle Differentialgleichung in drei Veränderlichen nichts anderes ist als eine gegebene Relation zwischen p, q, x, y, z, aus welcher eine Relation zwischen x, y, z bestimmt werden soll. Da nun $dz = p\,dx + q\,dy$ ist, so betrachtet *Lagrange* diese Gleichung als eine Differentialgleichung in den drei Grössen x, y, z, welche ausserdem die Grösse p als eine unbestimmte Function eben dieser drei Veränderlichen enthält. [77] Man darf aber bekanntlich, wenn eine solche Gleichung integrabel sein, d. h. eine bestimmte endliche Gleichung zwischen den drei Veränderlichen nach sich ziehen soll, die Coefficienten in jener nicht beliebig annehmen, sondern es muss eine gewisse Relation zwischen ihnen bestehen. Aus diesem Kriterium der Integrabilität oder Realität (*Euler* l. c. p. 5, 6) hat man die Bestimmung des Coefficienten p als Function der x, y, z zu entnehmen. Ist dieser Coefficient wirklich bestimmt, so liefert dann die Integration der Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ nach Regeln, die anderswoher bekannt sind, die gesuchte Relation zwischen x, y, z. Was nun die Bestimmung von p anbelangt, so führt die erwähnte Integrabilitätsbedingung wieder zu einer partiellen Differentialgleichung, und zwar in vier Veränderlichen. Dieselbe ist aber linear, d. h. sie enthält die Ableitungen nur in erster Dimension, und kann also nach Principien, die *Lagrange* aus anderem hergeleitet hat (Mém. de l'Acad. de Berlin 1774, 1779), integrirt werden. In dieser Lösung steckte noch eine Schwierigkeit[2]), die *Lagrange* nach seinem eigenen Geständniss lange Zeit gequält hat*). Ist nämlich p als Function der drei Veränderlichen x, y, z durch eine partielle Differentialgleichung gegeben, so bringt die Integration derselben nach einem bekannten Gesetz eine willkürliche Function zweier Grössen hinein, während doch die Bestimmung von z als Function der beiden Veränderlichen x und y eine willkürliche Function von nur einer Grösse zulässt. Eben diese Schwierigkeit, diesen scheinbaren Widerspruch hat *Lagrange* schliesslich glücklich gelöst, indem er durch geistreiche Schlüsse zeigte, wie jene Function zweier Grössen, welche ihrer Natur nach eine umfassendere Unendlichkeit ist als eine willkürliche Function einer Grösse, auf eine solche Function einer Veränderlichen zurückgeführt wird.

---

*) Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. édit. 8. Paris 1806. p. 390. »Diese Schwierigkeit — ich gestehe es — hat mich lange gequält.« cf. p. 386.

Uebrigens haben andere Analysten, welche die Methode von *Lagrange* durch Anwendungen erläuterten, wie z. B. der berühmte *Legendre* (Mémoires de l'Acad. de Paris. Année 1787. p. 337), die oben erwähnte Schwierigkeit gar nicht bemerkt*) oder sie vielleicht deshalb mit Stillschweigen übergangen, weil sie als ein nicht so wesentlicher Mangel jener Methode erscheinen durfte, zumal man bei der Anwendung der Methode nicht nöthig hatte, das allgemeine Integral der Hilfsgleichung für p zu finden (was eine willkürliche Function von zwei Grössen hineingebracht hätte), sondern schon mit einem particulären Werth von p die vollständige Integration der vorgelegten Gleichung erreichen konnte.

Während in der angegebenen Weise die Integration der partiellen Differentialgleichungen [78] erster Ordnung in drei Veränderlichen als erledigt und in jeder Beziehung abgeschlossen zu betrachten ist, verhält sich die Sache ganz anders, wenn es sich um vier oder mehr Veränderliche handelt. *Euler*, der die Gleichungen in drei Veränderlichen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ermittelung der Functionen von zwei Veränderlichen in grossem Umfange behandelt hatte, löste für den Fall von vier Veränderlichen nur wenige Beispiele (l. c. p. 423—441), in denen, wie er selbst bemerkt, nur die ersten Elemente dieser Wissenschaft enthalten sind, und wollte den Fall von fünf Veränderlichen wegen Mangels an Stoff (dies sind die Worte des grossen Mannes p. 457) nicht einmal berühren. Dann haben *Lagrange* selbst (Mém. de Berl. 1774, 1779) und andere Analysten, wie z. B. *Monge* (Mém. de Paris 1784, p. 556) und *Legendre* (l. c.) allerdings sehr beschränkte Fälle dieser Art betrachtet. Dieselben lassen sich leicht auf Gleichungen in drei Veränderlichen oder auf lineare Gleichungen reduciren. Die Integration von Gleichungen dieser letzteren einfachsten Form hatte *Lagrange* für beliebig viele Veränderliche gelehrt (Mém. l. c.).

Wenn wir nun den Versuch machen wollten, die oben bezeichnete schöne *Lagrange*'sche Methode zur allgemeinen und vollständigen Integration partieller Differentialgleichungen in drei Veränderlichen auf mehr Veränderliche auszudehnen, so gelangen wir bald zu unüberwindlichen Schwierigkeiten. Daher ist es vielleicht gekommen, dass die Analysten bis jetzt (soviel ich wenigstens weiss) diese Anwendung noch nicht ver-

---

*) Darüber äussert sich *Lagrange* selbst (Leçons p. 386).

sucht haben. Ich für meine Person habe es in Anbetracht dieser Schwierigkeiten für besser gehalten, die ganze Betrachtungsweise der partiellen Differentialgleichungen, aus welcher die *Lagrange*'sche Methode ihren Ursprung nimmt, zu verlassen und ein anderes Princip zu Hilfe zu nehmen. Obwohl dasselbe an sich ganz einfach ist, so sind jene Gleichungen bisher doch noch nicht von diesem Princip aus betrachtet worden. In der That wäre es auch, wenn nicht andere Hilfsmittel hinzukommen, wenig fruchtbar. Die partiellen Differentialgleichungen lassen sich als verstümmelte Differentialgleichungen gewöhnlicher Art betrachten, und zwar mit mehr Veränderlichen als den in erster Linie vorhandenen. Man hat nämlich die Ableitungen (p, q, u. s. w.) selbst als Veränderliche zu betrachten, deren Differentiale (dp, dq, ...) deshalb fehlen, weil man sie sich mit dem Factor Null behaftet denkt. So ist die Gleichung $dz = pdx + qdy = pdx + qdy + 0 \,.\, dp$ eine Gleichung zwischen den vier Veränderlichen x, y, z, p; denn q ist eine Grösse, die nach der Voraussetzung von den übrigen vier Grössen in gegebener Weise abhängt. Ebenso kann man allgemein eine partielle Differentialgleichung in m Veränderlichen betrachten als eine gewöhnliche Differentialgleichung in $2m - 2$ Veränderlichen, wenn man zu den m Hauptveränderlichen (z, x, y, ...) noch $m - 2$ accessorische Veränderliche (p, q, ...) hinzunimmt. [79] Es treten nämlich $m - 1$ Ableitungen auf, von denen jedoch eine, die durch die übrigen Grössen gegeben ist, nicht mitzählt. Nun hat *Monge* (l. c.) schon längst gegen die früher allgemein angenommene Meinung gelehrt, dass Differentialgleichungen, die den sogenannten Integrabilitätskriterien nicht genügen, keineswegs für sinnlos zu halten sind, dass dieselben vielmehr thatsächlich eine Integration zulassen, allerdings nicht durch eine einzige endliche Gleichung, wohl aber durch ein System von mehreren Gleichungen*). Soll diese ausgezeichnete Bemerkung bei unserem Problem angewandt werden, so ist zu erwägen, dass die Lösung einer partiellen Differentialgleichung wesentlich einen

---

*) Unzutreffend ist es, wenn *Euler* über Differentialgleichungen in drei Variablen die dem Integrabilitätskriterium nicht entsprechen sagt, »sie seien absurd, bedeuten überhaupt nichts und an ihre Integration könne man nicht einmal denken« (l. c. p. 7, 8). Scharfsinnig bemerkt *Monge* (Mém. de Paris 1784, p. 535): »Das Absurde war, dass ihre Integrale durch eine einzige Gleichung ausdrückbar sein sollten.«

Ausdruck einer der Hauptveränderlichen durch die übrigen fordert. Daher sind die in die Rechnung hineingekommenen accessorischen Veränderlichen (p, q, u. s. w.) wieder zu eliminiren. Da nun ihre Anzahl $m - 2$ ist, so muss die Zahl der Gleichungen, die zusammen die Integration ausmachen, nicht grösser sein als $m - 1$. Verhält es sich so, dann bleibt, wenn man aus diesen $m - 1$ Gleichungen die accessorischen Veränderlichen eliminirt, eine Endgleichung zwischen den Hauptveränderlichen selbst. Aber gerade hierin liegt die ganze Schwierigkeit. Es ist evident, dass eine Differentialgleichung in drei Veränderlichen immer durch ein System von zwei endlichen Gleichungen integrirbar ist. Ebenso ist es nun leicht einzusehen und von *Monge* entwickelt worden (l. c. p. 533, 534), dass eine Differentialgleichung in n Veränderlichen in der Regel, abgesehen von einigen besonderen Ausnahmen, durch ein System von $n - 1$ Gleichungen integrirt werden kann. Wir würden daher in unserem Falle an Stelle der gewünschten $m - 1$ Gleichungen $2m - 3$ Integralgleichungen erhalten, also zu viele, und könnten mit ihnen auf keine Weise unser vorgelegtes Ziel erreichen. So wäre also unsere Art und Weise, die partiellen Differentialgleichungen zu betrachten, gänzlich unfruchtbar und lieferte anscheinend nichts weiter als eine Zurückführung eines leichteren Problems auf ein complicirteres. Wenn es auch richtig ist, die partiellen Differentialgleichungen als gewöhnliche Differentialgleichungen zu betrachten, so bilden doch auf der anderen Seite diese letzteren in der That ein viel weiteres Gebiet, und jene sind dagegen nur eine einfachste Form von diesen. Es würde also die Meinung eine gewisse Wahrheit zu enthalten scheinen, dass die einfachste Form, die gleichsam ein specieller Ausnahmefall ist, durch ein System von weniger Gleichungen integrirt werden könne [80] als der allgemeine Fall*). Die Sache verhält sich aber anders, wie mir eine genauere Betrachtung der gewöhnlichen Differentialgleichungen in beliebig vielen Veränderlichen gezeigt hat, und ich bin dabei zu dem neuen und für mich wenigstens unerwarteten Satze gelangt, dass jede gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $2n$ und $2n - 1$ Veränderlichen immer durch ein System von n (oder weniger) Gleichungen integrirt werden kann. Dieser allgemeine Satz

*) Dass es Ausnahmefälle giebt, bemerkt *Monge* selbst l. c. p. 534. »Die Anzahl der Integralgleichungen ist nicht immer wie in dem vorigen Falle gleich der um eine Einheit verminderten Zahl der Veränderlichen.«

scheint die Natur jener Gleichungen, welche auch nach der rühmend erwähnten Bemerkung von *Monge* nicht genügend erkannt war, mehr aufzuklären, und aus ihm ergiebt sich auch als specielles Corollar die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichungen in beliebig vielen Veränderlichen.

Was wir bisher nur im Allgemeinen angedeutet haben, wird grössere Klarheit gewinnen, wenn wir es zunächst auf den einfachsten Fall, d. h. auf partielle Differentialgleichungen in drei Veränderlichen anwenden. Denn obgleich dieses Problem schon von *Lagrange* gelöst worden ist, so ist doch die eigene Darstellung des Erfinders (Leçons l. c.) nicht ganz frei von Bedenken, und eine neue Herleitung und Erläuterung dieser hervorragenden Lösung scheint nicht ganz überflüssig zu sein. Diese Herleitung sieht ab von dem sogenannten Integrabilitätskriterium und setzt auch die Integration der linearen Gleichungen nicht als bekannt voraus. Nur durch eine einfache Transformation der vorgelegten allgemeinen Gleichung wird sie in Kürze erledigt. Ferner wird bei ihr das eigenthümliche, durch *Lagrange*'s Scharfsinn entdeckte Phänomen, welches er selbst nur zur Aufklärung der seiner Lösung anhaftenden Schwierigkeit in Anspruch nahm und welches als accessorisch und gleichsam zufällig erscheinen konnte, nunmehr direct und an erster Stelle erforscht, aus den Quellen der Rechnung selbst geschöpft und zur Grundlage der ganzen Lösung der partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen gemacht.

§ 2.

Bevor wir aber an die Sache selbst herantreten, ist zu erinnern, dass bei dieser ganzen Untersuchung die Integration der Differentialgleichungen in zwei Veränderlichen als bekannt vorausgesetzt wird. Bekanntlich ist dieselbe wenigstens näherungsweise mit Hilfe der Reihen möglich. Diese Integration wird von allen Analysten, welche die partiellen Differentialgleichungen behandelt haben, als Postulat betrachtet*). **[81]** Hierher gehört aber nicht blos der allgemein bekannte Fall, wo eine Differentialgleichung in zwei Veränderlichen gegeben

---

*) *Euler*, Calc. Integr. Vol. III, p. 34. »So oft es bei diesem Geschäft gelingt, die Auflösung auf eine Differentialgleichung in zwei Veränderlichen zurückzuführen, hat man das Problem für gelöst zu halten.« cf. p. 67. Dasselbe bemerkt *Lagrange*. Mém. de Berlin 1779, p. 153.

ist, sondern auch der complicirtere Fall, wo zwei, drei u. s. w., oder allgemein n Gleichungen zusammen zu integriren sind, und zwar in drei, vier ... oder $n+1$ Veränderlichen. Bekannt ist, was *d'Alembert* und andere Analysten über solche Integrationen gelehrt haben. Es mag genügen hier kurz etwas zu zeigen, was andere Autoren nicht in hinreichender Allgemeinheit erläutert haben und wovon wir im Folgenden häufig Gebrauch machen, dass nämlich derartige Integrationen immer auf die Integration einer Gleichung in zwei Veränderlichen zurückgeführt werden können.

Es seien vorglegt n Differentialgleichungen erster Ordnung in $n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, und zwar unter folgender Form, auf welche man sie immer zurückführen kann:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad dx_1 = X_1 dz \\
&2) \quad dx_2 = X_2 dz \\
&3) \quad dx_3 = X_3 dz \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&n) \quad dx_n = X_n dz,
\end{aligned}
$$

wo die Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ in einer irgendwie gegebenen Weise von den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n$ selbst abhängen. Diese Gleichungen haben dann Relationen zwischen jenen $n+1$ Veränderlichen zur Folge, auf Grund deren man, wenn eine Veränderliche als die Hauptveränderliche angenommen wird, die übrigen, die von jener abhängen, als Functionen derselben betrachten darf. Differentiirt man die erste Gleichung unter der Annahme, dass dz ein constantes Differential ist, so ergiebt sich $d^2x_1 = dX_1 . dz$. Das vollständige Differential von X_1 als einer expliciten Function von mehreren Grössen hat aber folgende Form: $dX_1 = Mdx_1 + Ndx_2 + \cdots$. Setzt man hier die Werthe von $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots$ aus den gegebenen Gleichungen selbst ein, so kommt $dX_1 = Pdz$. Es wird also $d^2x_1 = Pdz^2$, wo P wieder eine gegebene Function der Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n$ ist. Auf ähnliche Weise ergiebt sich, wenn man diese Gleichung noch einmal differentiirt, $d^3x_1 = Qdz^3$. Setzt man diese Differentiationen fort, [82] so findet man als n-tes Differential $d^nx_1 = Sdz^n$. Wenn man sich nunmehr denkt, dass aus den folgenden n Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&1) \quad dx_1 = X_1 dz \\
&2) \quad d^2x_1 = Pdz^2
\end{aligned}
$$

$$3)\quad d^3x_1 = Q dz^3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$n)\quad d^n x_1 = S dz^n$$

die $n-1$ Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ eliminirt werden, so gelangt man zu einer Differentialgleichung n-ter Ordnung, welche nur die beiden Veränderlichen x_1 und z enthält. Ihre vollständige Integration liefert x_1 als eine bekannte Function der Veränderlichen z, in welche ausserdem n willkürliche Constanten $a, b, c, \ldots$ eingehen. Dass man dann die übrigen Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots, x_n$ als ebenfalls bekannte Functionen der Veränderlichen z und derselben Constanten $a, b, c, \ldots$ betrachten kann, ist aus der oben genannten Elimination, die die Werthe jener Veränderlichen liefert, klar.

Es giebt übrigens Fälle, in welchen die Integration mehrerer Differentialgleichungen, die zusammen bestehen, leichter als in der allgemeinen hier kurz angedeuteten Weise ausgeführt werden kann.

§ 3.

Problem I.

Eine partielle Differentialgleichung in drei Veränderlichen vollständig zu integriren.

Lösung.

Da in der Gleichung $dz = pdx + qdy$ durch die gegebene Relation zwischen q, p, x, y, z nichts weiter bewirkt wird als die Bestimmung von q durch p, x, y, z, so bleibt die Grösse p unbestimmt, und man darf daher jene Gleichung als eine Differentialgleichung in den vier Veränderlichen z, x, y und p betrachten. Es ist nun erlaubt, an Stelle der Grössen z, x, p drei andere Grössen a, b, c einzuführen, und zwar so, dass man für z, x, p nach Belieben Functionen von y, a, b, c annimmt. Denn wie auch immer die Grössen z, x und p (deren Relation vorläufig unbekannt ist) sich verhalten mögen und in welcher Weise man auch [83] die genannten Functionen wählen mag, immer kann man sich drei Werthe der a, b, c denken, welche den angenommenen drei Gleichungen, die die Werthe von z, x, p durch y, a, b, c ausdrücken, genügen. Auf diese Weise wird die vorgelegte Glei-

chung $dz = p\,dx + q\,dy$ allgemein in eine andere Gleichung in den vier Veränderlichen y, a, b, c transformirt werden. Nunmehr sind jene einzuführenden Functionen derart zu definiren, dass sowohl y als auch dy aus der Rechnung herausfällt. Alsdann wird sich nämlich eine Gleichung in den drei Veränderlichen a, b, c ergeben, die man ohne weiteres durch ein System von zwei Gleichungen integriren und so (wie in der Einleitung, in § 1, bemerkt worden ist) den beabsichtigten Zweck erreichen kann.

Da x, z und p als Functionen von y, a, b, c gedacht werden, so lassen sich ihre Differentiale in folgender Weise ausdrücken:

$$dx = X\,dy + \chi\,da + \chi'\,db + \chi''\,dc\,,$$
$$dz = Z\,dy + \zeta\,da + \zeta'\,db + \zeta''\,dc\,,$$
$$dp = P\,dy + \pi\,da + \pi'\,db + \pi''\,dc\,,$$

wobei es gleich ist, ob X, χ, χ', χ''; $Z, \ldots, \zeta''$; $P, \ldots, \pi''$ als explicite abhängig von y, a, b, c oder als implicite abhängig von y, x, z, p betrachtet werden. Da ferner eine Relation zwischen q, p, x, y, z gegeben ist, so kann man sich die Grösse q durch p, x, y, z ausgedrückt denken, und ihr Differential wird dann die Form $dq = q'\,dx + q''\,dy + q'''\,dz + q''''\,dp$ erhalten, wo q', q'', q''', q'''' als gegebene Functionen von x, y, z, p anzusehen sind.

Dies vorausgeschickt nimmt die vorgelegte Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

die folgende Form an:

$$0 = (Z - pX - q)\,dy + (\zeta - p\chi)\,da + (\zeta' - p\chi')\,db + (\zeta'' - p\chi'')\,dc\,.$$

Soll aus dieser Gleichung dy verschwinden, so hat man zu setzen

$$1) \qquad Z = pX + q\,,$$

und es bleibt dann die Gleichung

$$0 = da + \frac{\zeta' - p\chi'}{\zeta - p\chi}\,db + \frac{\zeta'' - p\chi''}{\zeta - p\chi}\,dc$$

übrig. Soll ferner diese Gleichung frei von der Grösse y werden, so müssen die Coefficienten $\frac{\zeta' - p\chi'}{\zeta - p\chi}$, $\frac{\zeta'' - p\chi''}{\zeta - p\chi}$, welche

im allgemeinen von y, a, b, c abhängen, hinsichtlich der Veränderlichen y constant sein, d. h. so beschaffen, dass ihre Ableitungen nach y [84] verschwinden. Wenn aber $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{N}\right) = 0$ gesetzt wird, so erhält man

$$N\frac{\partial M}{\partial y} - M\frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial y}.$$

Es muss daher sein

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - p\chi)}{\zeta - p\chi} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta' - p\chi')}{\zeta' - p\chi'} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta'' - p\chi'')}{\zeta'' - p\chi''}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - p\chi) = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - p\frac{\partial \chi}{\partial y} - \chi\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Ferner wird, da x und z Functionen von y, a, b, c sind, nach einem bekannten Satze über die Ableitungen von Functionen mehrerer Veränderlicher, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial a}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial a}$ sein, mithin

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - p\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial a} - p\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}(Z - pX) + X\frac{\partial p}{\partial a}$$
$$= \frac{\partial q}{\partial a} + X\frac{\partial p}{\partial a}, \text{ wegen } Z - pX = q.$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - p\chi) = \frac{\partial q}{\partial a} + X\frac{\partial p}{\partial a} - \chi\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial q}{\partial a} = q'\frac{\partial x}{\partial a} + q''\frac{\partial y}{\partial a} + q'''\frac{\partial z}{\partial a} + q''''\frac{\partial p}{\partial a}$$

oder wegen

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \chi, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = \zeta, \quad \frac{\partial p}{\partial a} = \pi,$$
$$\frac{\partial q}{\partial a} = q'\chi + q'''\zeta + q''''\pi.$$

Da ausserdem $\frac{\partial p}{\partial y} = P$ ist, so ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - p\chi) = (q' - P)\chi + q'''\zeta + (q'''' + X)\pi$$

oder

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - p\chi)}{\zeta - p\chi} = \frac{q'''\zeta + (q' - P)\chi + (q'''' + X)\pi}{\zeta - p\chi}.$$

Ebenso ergeben sich die Quotienten

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta' - p\chi')}{\zeta' - p\chi'}, \quad \frac{\frac{\partial}{\partial y}(\zeta'' - p\chi'')}{\zeta'' - p\chi''},$$

und man hat einfach in dem gefundenen Ausdrucke ζ, χ, π mit ζ', χ', π'; ζ'', χ'', π'' zu vertauschen. Es ist nunmehr evident, dass die oben genannte Bedingung erfüllt ist, d. h. dass die drei Quotienten gleich werden, wenn man setzt

$$2) \qquad q'''' + X = 0$$

$$3) \qquad q' - P = -pq'''.$$

Dann gehen nämlich jene drei Quotienten in q''' über. Hieraus ergiebt sich

$$X = -q'''', \quad P = q' + pq''',$$

und aus der Gleichung (1) findet man

$$Z = pX + q = q - pq''''.$$

[85] Nimmt man also diese Werthe für X, Z, P an, so wird die transformirte Gleichung nur die drei Veränderlichen a, b, c mit ihren Differentialen enthalten. Hiermit sind X, Z, P durch x, z, p, y gegeben, da q, q', q''', q'''' gegebene Functionen dieser Grössen sind. Werden daher in den oben für dx, dz, dp angenommenen Formeln die Grössen a, b, c als Constanten behandelt, so können aus den drei Differentialgleichungen

$$dx = Xdy = -q''''dy,$$

$$dz = Zdy = (q - pq'''')dy,$$

$$dp = Pdy = (q' + pq''')dy$$

durch Integration die Ausdrücke von x, z, p durch y gewonnen werden (§ 2). Da diese Ausdrücke nach dem oben (§ 2) bewiesenen drei willkürliche Constanten α, β, γ enthalten, so kann man die Grössen x, z, p auch als Functionen von α, β, γ ausser von y betrachten. Dann werden die vollständigen Differentiale dx, dz, dp, wenn man auch α, β, γ als Veränderliche behandelt, von selbst die angenommenen Formen erhalten, wo man jetzt für α, β, γ offenbar a, b, c setzen darf. So sind also durch Integration jener drei Differentialgleichungen in der That für x, z, p solche Functionen von y, a, b, c gefunden, durch deren Einführung die vorgelegte Gleichung $dz = pdx + qdy$ in eine Gleichung transformirt wird, die nur die drei Veränderlichen a, b, c enthält und die Form $da + Bdb = Cdc$ hat, wo nun B, C als bekannte Functionen von a, b, c anzusehen sind.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen übrig, wie man diese Gleichung durch ein System von zwei Gleichungen integriren kann[3]). Man betrachte c als eine Constante und integrire die Gleichung $da + Bdb = 0$ oder man bestimme (was, die Integration zugegeben, immer möglich ist, wie man leicht zeigen kann) einen Multiplicator M, der den Ausdruck $da + Bdb$ gleich dem Differential einer Function der beiden Veränderlichen a, b macht. Diese Function sei nun N. Dann wird

$$1) \qquad N = \varphi(c)$$

sein, wobei $\varphi(c)$ eine willkürliche Function der Grösse c bedeutet. Diese Function spielt, wenn c constant ist, auch die Rolle einer Constanten. Da nun aber sowohl der Multiplicator M als auch das Integral N ausser a, b auch die Grösse c, die wir als eine Constante betrachtet haben, enthalten, so wird das vollständige Differential von N, wenn wir c auch als eine Veränderliche behandeln, $dN = Mda + MBdb + \frac{\partial N}{\partial c} dc$ lauten. Hier wird, da N eine bekannte Function von a, b, c ist, auch $\frac{\partial N}{\partial c} = N'$ eine solche Function sein. [86] Differentiirt man daher die Gleichung $N = \varphi(c)$, so ergiebt sich

$$Mda + MBdb + N'dc = dc \cdot \varphi'(c).$$

Es ist aber $Mda + MBdb = MCdc$. Also wird

$$2) \qquad MC + N' = \varphi'(c).$$

Diese Gleichung liefert nun, combinirt mit der früheren 1), das vollständige Integral der Gleichung in drei Veränderlichen $da + Bdb = Cdc$.

Dies lässt sich leicht auf die Integration unserer partiellen Differentialgleichung übertragen. Da nämlich z, x, p als Functionen von y, a, b, c durch die drei Hilfsdifferentialgleichungen gegeben sind, so können umgekehrt a, b, c als gegebene Functionen von z, x, p, y betrachtet werden, und so werden auch M und N' solche Functionen sein. Nun liefern die Gleichungen 1) und 2) zwei Relationen zwischen den vier Grössen z, x, p, y. Denkt man sich daraus die Grösse p eliminirt, so kommt die gesuchte Relation zwischen z, x, y heraus. Diese Integration ist für vollständig zu halten, da sie die mit φ bezeichnete willkürliche Function enthält.

Wir wollen hier und im Folgenden mit F, F_1, F_2, F_3, ..., ferner mit f, f_1, f_2, f_3, ... bekannte Functionen von einer oder von mehreren Veränderlichen bezeichnen, mit ψ (oder φ) dagegen eine willkürliche Function. Ferner wollen wir $\frac{df(x)}{dx}$ durch $f'(x)$ ausdrücken und bei Functionen mit mehreren Veränderlichen $\frac{\partial f(x, y, z, \ldots)}{\partial x}$ durch f_x', $\frac{\partial f(x, y, z, \ldots)}{\partial y}$ durch f_y', $\frac{\partial f(x, y, z, \ldots)}{\partial z}$ durch f_z' u. s. w.[4]) Diese bequeme Bezeichnung hat *Lagrange* in seinen Vorlesungen angewandt (p. 53).

Dies vorausgeschickt, wird sich die gefundene Integration immer in folgender Form darstellen lassen:

$$1)\quad F(z, y, x, p) = \psi[f(z, y, x, p)],$$

$$2)\quad F_1(z, y, x, p) = \psi'[f(z, y, x, p)].$$

Es ist hier kaum nöthig, daran zu erinnern, dass unter dem Zeichen ψ die mit f bezeichnete Function die Rolle einer einzigen Grösse spielt und dass in diesem Sinne ψ' zu verstehen ist.

§ 4.

Die allgemeine Gleichung in vier Veränderlichen ist folgende:

$$dz = Pdx + Qdy + Rdp,$$

wo P, Q, R irgend welche gegebene Functionen der Veränderlichen z, x, y, p bedeuten. Von dieser Form stellt die im vorigen Paragraphen betrachtete Gleichung nur einen speciellen Fall dar, der in doppeltem Sinne beschränkt ist, einmal dadurch, dass $R = 0$ ist, ferner dadurch, dass die Function P, die im allgemeinen irgendwie in den vier Veränderlichen gegeben ist, gleich der einen Veränderlichen p angenommen wird. [87] Nichtsdestoweniger kann aber auch jene allgemeine Form auf drei Veränderliche reducirt werden und ist dann durch ein ähnliches System von zwei Gleichungen integrirbar. Das wird bei dem folgenden Problem gezeigt werden.

Problem II.

Eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung in vier Veränderlichen z, x, y, p

$$dz = Pdx + Qdy + Rdp,$$

wo P, Q, R beliebige gegebene Functionen jener Veränderlichen bedeuten, in eine Gleichung in drei Veränderlichen zu transformiren und diese durch ein System von zwei Gleichungen zu integriren.

Lösung.

In Analogie mit der vorigen Lösung kann man für x, y, p Functionen der Veränderlichen z und dreier anderer Grössen a, b, c einsetzen. Dadurch wird die Gleichung in eine andere in z, a, b, c transformirt. Nunmehr sind jene Functionen nach dem Gesetze zu definiren, dass aus dieser transformirten Gleichung z und dz herausfallen sollen.

Die Differentiale der Grössen x, y, p als Functionen von z, a, b, c seien in folgender Weise ausgedrückt:

$$dx = Xdz + \chi da + \chi' db + \chi'' dc,$$
$$dy = Ydz + \eta da + \eta' db + \eta'' dc,$$
$$dp = \Pi dz + \pi da + \pi' db + \pi'' dc.$$

Da ferner P, Q, R gegebene Functionen von z, x, y, p sind, so werden ihre Differentiale die folgende Form haben:

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dp + P''''dz,$$
$$dQ = Q'dx + Q''dy + Q'''dp + Q''''dz,$$
$$dR = R'dx + R''dy + R'''dp + R''''dz,$$

wo $P', \ldots, P''''$; $Q', \ldots, Q''''$; $R', \ldots, R''''$ wieder gegebene Functionen der oben genannten Grössen sind. Jetzt geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$0 = (PX + QY + R\Pi - 1)\,dz + (P\chi + Q\eta + R\pi)\,da \\ + (P\chi' + Q\eta' + R\pi')\,db + (P\chi'' + Q\eta'' + R\pi'')\,dc\,.$$

Setzt man nun den Coefficienten von dz gleich Null, so kommt

$$1) \qquad 1 = PX + QY + R\Pi\,.$$

Es bleibt also die Gleichung übrig

$$0 = da + \frac{P\chi' + Q\eta' + R\pi'}{P\chi + Q\eta + R\pi}\,db + \frac{P\chi'' + Q\eta'' + R\pi''}{P\chi + Q\eta + R\pi}\,dc\,.$$

Damit hier die Coefficienten von db und dc frei von z werden, sind ihre Ableitungen [88] nach z, wobei a, b, c als constant zu betrachten sind, gleich Null zu setzen. Es muss daher wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta + R\pi)}{P\chi + Q\eta + R\pi} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi' + Q\eta' + R\pi')}{P\chi' + Q\eta' + R\pi'} \\ = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi'' + Q\eta'' + R\pi'')}{P\chi'' + Q\eta'' + R\pi''}$$

sein. Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta + R\pi) = \left\{ \begin{array}{l} P\frac{\partial \chi}{\partial z} + Q\frac{\partial \eta}{\partial z} + R\frac{\partial \pi}{\partial z} \\ + \chi\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\frac{\partial Q}{\partial z} + \pi\frac{\partial R}{\partial z}\,. \end{array} \right.$$

Andererseits folgt aus einem bekannten Gesetz für die Differentiation der Functionen

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial a}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial a}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial a},$$

mithin ist

$$P\frac{\partial \chi}{\partial z} + Q\frac{\partial \eta}{\partial z} + R\frac{\partial \pi}{\partial z} = P\frac{\partial X}{\partial a} + Q\frac{\partial Y}{\partial a} + R\frac{\partial \Pi}{\partial a} \\ = \frac{\partial}{\partial a}(PX + QY + R\Pi) - X\frac{\partial P}{\partial a} - Y\frac{\partial Q}{\partial a} - \Pi\frac{\partial R}{\partial a} \\ = -X\frac{\partial P}{\partial a} - Y\frac{\partial Q}{\partial a} - \Pi\frac{\partial R}{\partial a}, \text{ wegen } PX + QY + R\Pi = 1\,.$$

Es wird demnach

$$\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta + R\pi)$$

$$= -X\frac{\partial P}{\partial a} - Y\frac{\partial Q}{\partial a} - \Pi\frac{\partial R}{\partial a} + \chi\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\frac{\partial Q}{\partial z} + \pi\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial P}{\partial a} = P'\frac{\partial x}{\partial a} + P''\frac{\partial y}{\partial a} + P'''\frac{\partial p}{\partial a} + P''''\frac{\partial z}{\partial a} = P'\chi + P''\eta + P'''\pi,$$

ebenso

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = Q'\chi + Q''\eta + Q'''\pi, \quad \frac{\partial R}{\partial a} = R'\chi + R''\eta + R'''\pi.$$

Ausserdem ist

$$\frac{\partial P}{\partial z} = P'\frac{\partial x}{\partial z} + P''\frac{\partial y}{\partial z} + P'''\frac{\partial p}{\partial z} + P'''' = P'X + P''Y + P'''\Pi + P''''$$

und

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = Q'X + Q''Y + Q'''\Pi + Q'''',$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = R'X + R''Y + R'''\Pi + R''''.$$

Setzt man diese Ausdrücke ein, so ergiebt sich

$$\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta + R\pi)$$

$$\begin{aligned}&= (P'X + P''Y + P'''\Pi + P'''' - XP' - YQ' - \Pi R')\chi \\ &+ (Q'X + Q''Y + Q'''\Pi + Q'''' - XP'' - YQ'' - \Pi R'')\eta \\ &+ (R'X + R''Y + R'''\Pi + R'''' - XP''' - YQ''' - \Pi R''')\pi\end{aligned}$$

und

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta + R\pi)}{P\chi + Q\eta + R\pi} =$$

$$\frac{[(P''-Q')Y + (P'''-R')\Pi + P'''']\chi + [(Q'-P'')X + (Q'''-R'')\Pi + Q'''']\eta + [(R'-P''')X + (R''-Q''')Y + R'''']\pi}{P\chi + Q\eta + R\pi}.$$

[89] Hieraus ergeben sich die beiden übrigen Quotienten

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi'+Q\eta'+R\pi')}{P\chi'+Q\eta'+R\pi'}, \quad \frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi''+Q\eta''+R\pi'')}{P\chi''+Q\eta''+R\pi''},$$

wenn man χ, η, π mit χ', η', π'; χ'', η'', π'' vertauscht. Diese drei Quotienten werden einander gleich, weil von χ, η, π unabhängig, wenn man setzt

$$2) \quad Q[(P''-Q')Y+(P'''-R')\Pi+P''''] \\ = P[(Q'-P'')X+(Q'''-R'')\Pi+Q'''']$$

$$3) \quad R[(P''-Q')Y+(P'''-R')\Pi+P''''] \\ = P[(R'-P''')X+(R''-Q''')Y+R''''].$$

Es werden also die drei unbekannten Grössen X, Y, Π durch die folgenden drei Gleichungen definirt:

$$1) \qquad 1 = PX+QY+R\Pi,$$

$$2) \quad PQ''''-QP''''+P(Q'-P'')X-Q(P''-Q')Y \\ +(PQ'''-PR''-QP'''+QR')\Pi=0,$$

$$3) \quad PR''''-RP''''+P(R'-P''')X \\ +(PR''-PQ'''-RP''+RQ')Y-R(P'''-R')\Pi=0.$$

Entnimmt man aus 1) $PX = 1-QY-R\Pi$ und setzt dies in 2), 3) ein, so ergiebt sich

$$1) \begin{cases} PQ''''-QP''''+Q'-P'' \\ +(PQ'''+QR'+RP''-QP'''-RQ'-PR'')\Pi=0, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} PR''''-RP''''+R'-P''' \\ +(PR''+RQ'+QP'''-RP''-QR'-PQ''')Y=0. \end{cases}$$

Hieraus folgt endlich

$$\Pi = \frac{QP''''-PQ''''+P''-Q'}{PQ'''-QP'''+QR'-RQ'+RP''-PR''},$$

$$Y = \frac{PR''''-RP''''+R'-P'''}{PQ'''-QP'''+QR'-RQ'+RP''-PR''}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird nach Ausführung der Rechnung

$$X = \frac{1-QY-R\Pi}{P} = \frac{RQ''''-QR''''+Q'''-R''}{PQ'''-QP'''+QR'-RQ'+RP''-PR''}.$$

In dieser Weise drücken sich also X, Y, Π durch gegebene Functionen von x, y, z, p aus.

Werden jetzt wie bei dem vorigen Problem (§ 3) [**90**] in den für dx, dy, dp angenommenen Formeln die Grössen a, b, c als Constanten betrachtet, so kann man durch Integration aus den Gleichungen

$$dx = X dz,$$
$$dy = Y dz,$$
$$dp = \Pi dz$$

x, y, p ausgedrückt durch z und drei willkürliche Constanten a, b, c erhalten (§ 2). Die vollständigen Differentiale dieser Ausdrücke, wobei auch a, b, c variiren, gehen dann von selbst in die für dx, dy, dp angenommenen Formen über. Auf diese Weise sind also die drei Functionen von z, a, b, c gefunden, durch deren Einführung an Stelle von x, y, p die vorgelegte Differentialgleichung in eine neue Gleichung mit nur drei Veränderlichen a, b, c transformirt wird. Wie aber diese Gleichung durch ein System von zwei Gleichungen integrirt werden kann, das ist bei der vorigen Lösung (§ 3) hinreichend erklärt worden.

Da übrigens wieder, wie x, z, p als Functionen von z, a, b, c gegeben sind, auch umgekehrt a, b, c als gegebene Functionen von x, y, z, p betrachtet werden können, so ist ohne weiteres klar, dass die Integration der vorgelegten Gleichung

$$dz = P dx + Q dy + R dp$$

durch zwei Gleichungen von folgender Form ausgedrückt wird:

$$1) \quad F(x, y, p, z) = \psi[f(x, y, p, z)]$$
$$2) \quad F_1(x, y, p, z) = \psi'[f(x, y, p, z)],$$

wo die Functionszeichen in der oben erklärten Bedeutung zu nehmen sind.

§ 5.

Problem III.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in fünf Veränderlichen durch ein System von drei Gleichungen zu integriren.

Lösung.

Es sei folgende Gleichung in den fünf Veränderlichen u, x, y, z, p vorgelegt:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdp,$$

wobei P, Q, R, S gegebene Functionen von u, x, y, z, p sind. Wir wollen annehmen, p sei constant. Dann geht die Gleichung in folgende über: $du = Pdx + Qdy + Rdz$. Dieselbe lässt sich als Gleichung in vier Veränderlichen*) nach dem vorigen Problem (§ 4) durch ein System von zwei Gleichungen integriren. Diese Integration liefert

[91] 1) $F(x, y, z, u) = \psi[f(x, y, z, u)]$

2) $F_1(x, y, z, u) = \psi'[f(x, y, z, u)]$.

Da aber bei dieser Integration die Grösse p als constant vorausgesetzt wird und in den Coefficienten P, Q, R vorkommt, so wird diese Grösse auch in den von jenen Coefficienten abhängigen, mit F, F_1, f bezeichneten Ausdrücken neben x, y, z, u in bestimmter Weise auftreten, und es muss also anstatt $F(x, y, z, u)$ gesetzt werden $F(x, y, z, u, p)$. Dasselbe gilt von den mit F_1 und f bezeichneten Functionen, welche Ausdrücke sein werden, die die fünf Grössen x, y, z, u, p in gegebener Weise enthalten. Da ferner die mit ψ bezeichnete Function eine willkürliche ist, so kann auch sie in irgend einer Weise die Grösse p enthalten. Wird nämlich die Function $f(x, y, z, u, p)$ als ein analytischer Ausdruck, der sich in gegebener Weise aus den Grössen x, y, z, u, p zusammensetzt, zur Abkürzung mit dem einen Buchstaben f bezeichnet, so kann man sich die willkürliche Function $\psi(f)$ in folgender Form denken: $\psi(f) = \mathfrak{A}f^\alpha + \mathfrak{B}f^\beta + \mathfrak{C}f^\gamma + \ldots$, wo die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ irgend welche Constanten sind und deshalb, abgesehen von absoluten Zahlen oder wirklichen Constanten, auch noch mit der als constant gedachten Grösse p in irgend einer Weise behaftet sein können. Auf solche Weise ist aber dieser Ausdruck für $\psi(f)$ nichts anderes als die allgemeine Form einer Function der zwei Grössen f und p, und es muss daher an Stelle von $\psi(f)$ gesetzt werden $\psi(f, p)$.

*) Diese Gleichung ist nicht bloss viergliedrig, sondern auch als eine Gleichung in vier Veränderlichen zu betrachten. Uebrigens sind bei unserer ganzen Untersuchung Gleichungen mit n Gliedern und solche mit n Veränderlichen zu unterscheiden.

Mithin gehen die beiden oben erwähnten Gleichungen in dem von uns angenommenen Falle in die folgenden über:

$$1)\quad F(x, y, z, u, p) = \psi[f(x, y, z, u, p), p],$$
$$2)\quad F_1(x, y, z, u, p) = \psi_f',$$

wo das Zeichen ψ' nach der oben in § 3 angegebenen *Lagrange*schen Bezeichnungsweise zu verstehen ist.

Diese beiden Gleichungen sind zwar zur vollständigen Integration der vorgelegten Differentialgleichung nothwendig, da dieselbe ohne jede Beschränkung, mithin auch für ein constantes p, gilt. Aber sie sind für sich allein nicht hinreichend, da die Differentialgleichung nicht blos für constantes p bestehen muss. Um die dritte Gleichung zu finden, welche mit jenen vereinigt das vollständige Integral liefert, hat man die erste Gleichung zu differentiiren, und zwar so, dass auch p als eine Veränderliche behandelt wird. Dann wird nach der soeben erwähnten Bezeichnungsweise

$$F_x'\cdot dx + F_y'\cdot dy + F_z'\cdot dz + F_u'\cdot du + F_p'\cdot dp$$
$$= \psi_f'\cdot df + \psi_p'\cdot dp,$$

wenn wir den Buchstaben f der Kürze wegen in der oben angegebenen Weise anwenden. Daraus ergiebt sich wegen

$$df = f_x'\cdot dx + f_y'\cdot dy + f_z'\cdot dz + f_u'\cdot du + f_p'\cdot dp$$

[92] und unter Einsetzung von $\psi_f' = F_1(x, y, z, u, p)$ aus der Gleichung 2)

$$\begin{cases} F_x'\cdot dx + F_y'\cdot dy + F_z'\cdot dz + F_u'\cdot du + F_p'\cdot dp = \\ F_1(x, y, z, u, p)\cdot(f_x'\cdot dx + f_y'\cdot dy + f_z'\cdot dz + f_u'\cdot du + f_p'\cdot dp) \\ \qquad + \psi_p'\cdot dp \end{cases}$$

oder

$$du = \mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz + \mathfrak{S}dp,$$

wo

$$\mathfrak{P} = \frac{F_x' - F_1(x, y, z, u, p)\cdot f_x'}{f_u'\cdot F_1(x, y, z, u, p) - F_u'},$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{F_y' - F_1(x, y, z, u, p)\cdot f_y'}{f_u'\cdot F_1(x, y, z, u, p) - F_u'},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{F_z' - F_1(x, y, z, u, p,)\cdot f_z'}{f_u'\cdot F_1(x, y, z, u, p) - F_u'},$$

$$\mathfrak{S} = \frac{F_p' - F_1(x, y, z, u, p) f_p' - \psi_p'}{f_u' \cdot F_1(x, y, z, u, p) - F_u'}.$$

Dass die mit den Buchstaben F', f' bezeichneten Functionen wieder für bekannte Functionen von x, y, z, u, p zu halten sind, ist offenbar. Nun muss auf Grund der mit Hilfe des vorigen Problems gefundenen Integration, wenn man p constant oder $dp = 0$ setzt, $du = \mathfrak{P} dx + \mathfrak{Q} dy + \mathfrak{R} dz$ mit der vorgelegten Gleichung $du = P dx + Q dy + R dz$ übereinstimmen. Mithin müssen die Gleichungen $\mathfrak{P} = P$, $\mathfrak{Q} = Q$, $\mathfrak{R} = R$ identisch bestehen und für jeden Werth der willkürlichen Constanten p gelten, wobei es jetzt gleichgiltig ist, ob diese unbestimmte Grösse als Variable oder als Constante betrachtet wird. Damit also die Gleichung $du = \mathfrak{P} dx + \mathfrak{Q} dy + \mathfrak{R} dz + \mathfrak{S} dp$ mit der vorgelegten Gleichung $du = P dx + Q dy + R dz + S dp$ in jeder Beziehung zusammenstimme, ist nichts weiter erforderlich, als dass noch $\mathfrak{S} = S$ ist, woraus hervorgeht

$$F_p' - F_1(x,y,z,u,p) f_p' - \psi_p' = S \cdot [f_u' \cdot F_1(x,y,z,u,p) - F_u']$$

oder

$$\psi_p' = F_p' - F_1(x,y,z,u,p) f_p' - S \cdot f_u' \cdot F_1(x,y,z,u,p) + S \cdot F_u'.$$

Auf diese Weise findet man also auch ψ_p' gleich einer gegebenen Function von x, y, z, u, p, die wir mit dem Buchstaben F_2 bezeichnen wollen. Daher ist schliesslich die vollständige Integration der vorgelegten Gleichung in dem System der folgenden drei Gleichungen zusammengefasst:

[93]
1) $F(x, y, z, u, p) = \psi\,[f(x, y, z, u, p), p]$
2) $F_1(x, y, z, u, p) = \psi_f'$
3) $F_2(x, y, z, u, p) = \psi_p'$.

§ 6.

Problem IV.

Eine partielle Differentialgleichung in vier Veränderlichen vollständig zu integriren.

Lösung.

Es sei $du = p dx + q dy + r dz$. Dann wird als gegeben vorausgesetzt eine Relation zwischen den drei Ableitungen

$p=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q=\frac{\partial u}{\partial y}$, $r=\frac{\partial u}{\partial z}$ und den vier Veränderlichen u, x, y, z, und daraus soll eine Relation zwischen diesen vier Veränderlichen selbst ermittelt werden. Die oben angeführte Gleichung kann man nun betrachten als eine Gleichung in den sechs Veränderlichen u, x, y, z, p, q, durch welche auch r gegeben ist. Diese Differentialgleichung muss man durch ein System von drei endlichen Gleichungen integriren, aus denen sich dann durch Elimination von p, q von selbst die gesuchte Gleichung zwischen u, x, y, z ergiebt. Da nun aber im vorigen Problem (§ 5) gezeigt worden ist, wie eine gewöhnliche Differentialgleichung in fünf Veränderlichen durch ein System von drei Gleichungen integrirt werden kann, so ist jetzt nichts anderes erforderlich als die vorgelegte partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung in fünf Veränderlichen zu transformiren. Zu diesem Zweck wollen wir wie oben in § 3 und 4 annehmen, dass für u, x, y, p, q Functionen der Grösse z und von fünf anderen Grössen a, b, c, e, g eingesetzt werden. Die Differentiale dieser Functionen werden folgende Form haben:

$$\begin{aligned}
dx &= X dz + \chi da + \chi' db + \chi'' dc + \chi''' de + \chi'''' dg,\\
dy &= Y dz + \eta da + \eta' db + \eta'' dc + \eta''' de + \eta'''' dg,\\
du &= U dz + v da + v' db + v'' dc + v''' de + v'''' dg,\\
dp &= P dz + \pi da + \pi' db + \pi'' dc + \pi''' de + \pi'''' dg,\\
dq &= Q dz + \mathfrak{q} da + \mathfrak{q}' db + \mathfrak{q}'' dc + \mathfrak{q}''' de + \mathfrak{q}'''' dg.
\end{aligned}$$

Da man ferner mit Hilfe der gegebenen Relation r durch x, y, z, u, p, q ausdrücken kann, so wird das Differential von r folgende Form annehmen:

$$dr = r' dx + r'' dy + r''' dz + r^{\mathrm{IV}} du + r^{\mathrm{V}} dp + r^{\mathrm{VI}} dq,$$

wo r', r'', ..., r^{VI} gegebene Functionen jener sechs Grössen sind. Dies vorausgeschickt geht die vorgelegte Gleichung $du = p dx + q dy + r dz$ in folgende über:

$$\begin{aligned}
[94] \quad 0 = (pX + qY + r - U)\, dz &+ (p\chi + q\eta - v)\, da\\
&+ (p\chi' + q\eta' - v')\, db + (p\chi'' + q\eta'' - v'')\, dc\\
&+ (p\chi''' + q\eta''' - v''')\, de + (p\chi^{\mathrm{IV}} + q\eta^{\mathrm{IV}} - v^{\mathrm{IV}})\, dg.
\end{aligned}$$

Soll nun aus dieser Gleichung sowohl dz als auch z herausfallen, so muss man setzen

$$1) \qquad U = pX + qY + r;$$

ferner muss sein

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(p\chi + q\eta - v)}{p\chi + q\eta - v} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(p\chi' + q\eta' - v')}{p\chi' + q\eta' - v'} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(p\chi'' + q\eta'' - v'')}{p\chi'' + q\eta'' - v''}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial z}(p\chi''' + q\eta''' - v''')}{p\chi''' + q\eta''' - v'''} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}(p\chi^{IV} + q\eta^{IV} - v^{IV})}{p\chi^{IV} + q\eta^{IV} - v^{IV}}.$$

Man hat also $\frac{\partial}{\partial z}(p\chi + q\eta - v)$ zu entwickeln, so dass also bei der Differentiation nur z als Veränderliche behandelt wird, während a, b, c, e, g als Constanten betrachtet werden. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial z}(p\chi + q\eta - v) = p\frac{\partial \chi}{\partial z} + q\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} + \chi\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Der erste Bestandtheil $p\frac{\partial \chi}{\partial z} + q\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}$ ist gleich

$$p\frac{\partial X}{\partial a} + q\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}(pX + qY - U) - X\frac{\partial p}{\partial a} - Y\frac{\partial q}{\partial a}$$

$$= -\frac{\partial r}{\partial a} - X\frac{\partial p}{\partial a} - Y\frac{\partial q}{\partial a} \text{ auf Grund der Gleichung 1).}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \pi, \quad \frac{\partial q}{\partial a} = \mathfrak{q},$$

$$\frac{\partial r}{\partial a} = r'\frac{\partial x}{\partial a} + r''\frac{\partial y}{\partial a} + r^{IV}\frac{\partial u}{\partial a} + r^{V}\frac{\partial p}{\partial a} + r^{VI}\frac{\partial q}{\partial a}$$

$$= r'\chi + r''\eta + r^{IV}v + r^{V}\pi + r^{VI}\mathfrak{q};$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = Q.$$

Mithin wird

$$\frac{\partial}{\partial z}(p\chi + q\eta - v) = (-r' + P)\chi + (-r'' + Q)\eta - r^{IV}v$$
$$- (r^{V} + X)\pi - (r^{VI} + Y)\mathfrak{q}$$

und

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(p\chi + q\eta - v)}{p\chi + q\eta - v}$$

$$= \frac{r^{IV}v + (r' - P)\chi + (r'' - Q)\eta + (r^{V} + X)\pi + (r^{VI} + Y)\mathfrak{q}}{v - p\chi - q\eta}$$

Vertauscht man $\chi, \eta, v, \pi, \mathfrak{q}$ mit $\chi', \eta', v', \pi', \mathfrak{q}'$; $\chi'', \eta'', v'', \pi'', \mathfrak{q}''$; $\chi''', \eta''', v''', \pi''', \mathfrak{q}'''$; $\chi^{IV}, \eta^{IV}, v^{IV}, \pi^{IV}, \mathfrak{q}^{IV}$, so ergeben sich die vier übrigen Quotienten. Sie alle werden einander und dem ersten gleich, weil von $v, \chi, \eta, \pi, \mathfrak{q}$ unabhängig, sein, wenn gesetzt wird:

2) $r^{V} + X = 0$

3) $r^{VI} + Y = 0$

4) $r' - P = -pr^{IV}$

5) $r'' - Q = -qr^{IV}$.

Daraus geht hervor

1) $X = -r^{V}$

2) $Y = -r^{VI}$

[95] 3) $P = r' + pr^{IV}$

4) $Q = r'' + qr^{IV}$,

woraus endlich folgt

5) $U = pX + qY + r = r - pr^{V} - qr^{VI}$.

Es können also die Grössen X, Y, U, P, Q als gegebene Functionen von x, y, z, u, p, q betrachtet werden. Werden jetzt in den angenommenen Differentialformeln a, b, c, e, g als Constanten behandelt, so lassen sich aus den Hilfsdifferentialgleichungen

1) $dx = -r^{V}dz$

2) $dy = -r^{VI}dz$

3) $du = (r - pr^{V} - qr^{VI})\,dz$

4) $dp = (r' + pr^{IV})\,dz$

5) $dq = (r'' + qr^{IV})\,dz$,

wenn man dieselben integrirt (§ 2), x, y, u, p, q durch z und durch fünf willkürliche constante Grössen a, b, c, e, g aus-

drücken. Die vollständigen Differentiale dieser Ausdrücke werden dann, wenn man jene Grössen als Veränderliche betrachtet, von selbst die angenommenen Formen erhalten. Setzt man daher diese Werthe für x, y, u, p, q in die vorgelegte Gleichung $du = pdx + qdy + rdz$ ein, so wird sie in eine Gleichung übergehen, die gar nicht mehr z, sondern nur die fünf Grössen a, b, c, e, g und ihre Differentiale enthält. Die Integration dieser transformirten Gleichung ist aber auf Grund des vorigen Problems (§ 5) in folgenden drei Gleichungen enthalten:

$$1)\quad F(a, b, c, e, g) = \psi\,[f(a, b, c, e, g), g]$$

$$2)\quad F_1(a, b, c, e, g) = \psi_f'$$

$$3)\quad F_2(a, b, c, e, g) = \psi_g'.$$

Wie nun aber x, y, u, p, q in gegebener Weise von z, a, b, c, e, g abhängen, so kann man sich umgekehrt a, b, c, e, g durch z, x, y, u, p, q ausgedrückt denken. Es sind daher die Functionen F, F_1, F_2 und f als gegebene Functionen von z, x, y, u, p, q zu betrachten. Ebenso wird auch die Grösse g eine solche Function sein, und wir wollen sie mit dem Functionszeichen f_1 bezeichnen. Dann wird also die vollständige Integration der vorgelegten partiellen Differentialgleichung in vier Veränderlichen durch ein System von drei Gleichungen folgender Form dargestellt werden

$$1)\quad F(x, y, z, u, p, q) = \psi\,[f(x, y, z, u, p, q),\ f_1(x, y, z, u, p, q)]$$

[**96**]

$$2)\quad F_1(x, y, z, u, p, q) = \psi_f'$$

$$3)\quad F_2(x, y, z, u, p, q) = \psi_{f_1}'.$$

Denkt man sich aus ihnen die Grössen p, q eliminirt, so ergiebt sich die gesuchte Gleichung in x, y, z, u. Da ferner die Integration eine willkürliche Function von zwei Grössen enthält, so ist sie als vollständig zu betrachten.

§ 7.

Problem V.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung in sechs Veränderlichen durch ein System von drei endlichen Gleichungen zu integriren.

Lösung.

Da eine Differentialgleichung in fünf Veränderlichen nach dem dritten Problem durch ein System von drei Gleichungen integrirbar ist, so ist zu zeigen, dass die Differentialgleichung in sechs Veränderlichen in eine andere transformirt werden kann, die nur fünf Veränderliche und deren Differentiale enthält. In den sechs Veränderlichen u, x, y, z, p, q sei folgende Gleichung vorgelegt:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdp + Tdq\,,$$

wo P, Q, R, S, T gegebene Functionen eben jener Veränderlichen sind. Daher werden sich ihre Differentiale so ausdrücken:

$$\begin{aligned}
dP &= P'dx + P''dy + P'''dz + P^{\mathrm{IV}}dp + P^{\mathrm{V}}dq + P^{\mathrm{VI}}du\,,\\
dQ &= Q'dx + Q''dy + Q'''dz + Q^{\mathrm{IV}}dp + Q^{\mathrm{V}}dq + Q^{\mathrm{VI}}du\,,\\
dR &= R'dx + R''dy + R'''dz + R^{\mathrm{IV}}dp + R^{\mathrm{V}}dq + R^{\mathrm{VI}}du\,,\\
dS &= S'dx + S''dy + S'''dz + S^{\mathrm{IV}}dp + S^{\mathrm{V}}dq + S^{\mathrm{VI}}du\,,\\
dT &= T'dx + T''dy + T'''dz + T^{\mathrm{IV}}dp + T^{\mathrm{V}}dq + T^{\mathrm{VI}}du\,,
\end{aligned}$$

wobei $P' \ldots P^{\mathrm{VI}}$, $Q' \ldots Q^{\mathrm{VI}}$, ..., $T' \ldots T^{\mathrm{VI}}$ wieder gegebene Functionen jener Veränderlichen sind. Wir wollen nun annehmen, dass an Stelle von x, y, z, p, q Functionen der Grösse u und der fünf neuen Grössen a, b, c, e, g eingesetzt werden. Dann lassen sich die Differentiale der ersteren so ausdrücken:

$$\begin{aligned}
dx &= Xdu + \chi da + \chi' db + \chi'' dc + \chi''' de + \chi'''' dg\,,\\
dy &= Ydu + \eta da + \eta' db + \eta'' dc + \eta''' de + \eta'''' dg\,,\\
dz &= Zdu + \zeta da + \zeta' db + \zeta'' dc + \zeta''' de + \zeta'''' dg\,,\\
dp &= \mathfrak{P}du + \pi da + \pi' db + \pi'' dc + \pi''' de + \pi'''' dg\,,\\
dq &= \mathfrak{Q}du + \mathfrak{q} da + \mathfrak{q}' db + \mathfrak{q}'' dc + \mathfrak{q}''' de + \mathfrak{q}'''' dg\,.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke ein, so geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$\begin{aligned}
[97]\qquad 0 = {} & (PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q} - 1)\,du\\
& + (P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + T\mathfrak{q})\,da\\
& + (P\chi' + Q\eta' + R\zeta' + S\pi' + T\mathfrak{q}')\,db\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + (P\chi^{\mathrm{IV}} + Q\eta^{\mathrm{IV}} + R\zeta^{\mathrm{IV}} + S\pi^{\mathrm{IV}} + T\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}})\,dg\,.
\end{aligned}$$

Soll diese Gleichung von du frei werden, so muss man setzen

1) $$PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q} = 1\,.$$

Damit sie ferner auch von u befreit werde, muss wie oben (§ 6) sein

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + T\mathfrak{q})}{P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + T\mathfrak{q}}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial u}(P\chi' + Q\eta' + R\zeta' + S\pi' + T\mathfrak{q}')}{P\chi' + Q\eta' + R\zeta' + S\pi' + T\mathfrak{q}'}$$

. . . .

. . . .

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial u}(P\chi^{IV} + Q\eta^{IV} + R\zeta^{IV} + S\pi^{IV} + T\mathfrak{q}^{IV})}{P\chi^{IV} + Q\eta^{IV} + R\zeta^{IV} + S\pi^{IV} + T\mathfrak{q}^{IV}}\,.$$

Es sind daher nach der bisher angewandten Methode die in den Zählern dieser fünf Brüche auftretenden Ableitungen zu entwickeln. Nun ist aber

$$\frac{\partial}{\partial u}(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\pi + T\mathfrak{q})$$

$$= \begin{cases} \chi\frac{\partial P}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q}{\partial u} + \zeta\frac{\partial R}{\partial u} + \pi\frac{\partial S}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial u} \\ + P\frac{\partial \chi}{\partial u} + Q\frac{\partial \eta}{\partial u} + R\frac{\partial \zeta}{\partial u} + S\frac{\partial \pi}{\partial u} + T\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \chi\frac{\partial P}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q}{\partial u} + \zeta\frac{\partial R}{\partial u} + \pi\frac{\partial S}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial u} \\ + P\frac{\partial X}{\partial a} + Q\frac{\partial Y}{\partial a} + R\frac{\partial Z}{\partial a} + S\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial a} + T\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial a} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \chi\frac{\partial P}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q}{\partial u} + \zeta\frac{\partial R}{\partial u} + \pi\frac{\partial S}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial u} \\ + \frac{\partial}{\partial a}(PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q}) \\ - X\frac{\partial P}{\partial a} - Y\frac{\partial Q}{\partial a} - Z\frac{\partial R}{\partial a} - \mathfrak{P}\frac{\partial S}{\partial a} - \mathfrak{Q}\frac{\partial T}{\partial a} \end{cases}$$

oder auf Grund der Gleichung 1)

$$=\left\{\begin{array}{l}\chi\frac{\partial P}{\partial u}+\eta\frac{\partial Q}{\partial u}+\zeta\frac{\partial R}{\partial u}+\pi\frac{\partial S}{\partial u}+\mathfrak{q}\frac{\partial T}{\partial u}\\ -X\frac{\partial P}{\partial a}-Y\frac{\partial Q}{\partial a}-Z\frac{\partial R}{\partial a}-\mathfrak{P}\frac{\partial S}{\partial a}-\mathfrak{Q}\frac{\partial T}{\partial a}.\end{array}\right.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial P}{\partial a}=P'\frac{\partial x}{\partial a}+P''\frac{\partial y}{\partial a}+P'''\frac{\partial z}{\partial a}+P^{\mathrm{IV}}\frac{\partial p}{\partial a}+P^{\mathrm{V}}\frac{\partial q}{\partial a}$$
$$=P'\chi+P''\eta+P'''\zeta+P^{\mathrm{IV}}\pi+P^{\mathrm{V}}\mathfrak{q},$$

[98] $$\frac{\partial P}{\partial u}=P'\frac{\partial x}{\partial u}+P''\frac{\partial y}{\partial u}+P'''\frac{\partial z}{\partial u}+P^{\mathrm{IV}}\frac{\partial p}{\partial u}+P^{\mathrm{V}}\frac{\partial q}{\partial u}+P^{\mathrm{VI}}$$
$$=P'X+P''Y+P'''Z+P^{\mathrm{IV}}\mathfrak{P}+P^{\mathrm{V}}\mathfrak{Q}+P^{\mathrm{VI}}.$$

Drückt man auf ähnliche Weise die Ableitungen von Q, R, S, T nach a und nach u aus, so wird

$$\frac{\partial}{\partial u}(P\chi+Q\eta+R\zeta+S\pi+T\mathfrak{q})$$
$$\begin{aligned}=&(P'X+P''Y+P'''Z+P^{\mathrm{IV}}\mathfrak{P}+P^{\mathrm{V}}\mathfrak{Q}+P^{\mathrm{VI}}\\&\quad-XP'-YQ'-ZR'-\mathfrak{P}S'-\mathfrak{Q}T')\chi\\+&(Q'X+Q''Y+Q'''Z+Q^{\mathrm{IV}}\mathfrak{P}+Q^{\mathrm{V}}\mathfrak{Q}+Q^{\mathrm{VI}}\\&\quad-XP''-YQ''-ZR''-\mathfrak{P}S''-\mathfrak{Q}T'')\eta\\+&(R'X+R''Y+R'''Z+R^{\mathrm{IV}}\mathfrak{P}+R^{\mathrm{V}}\mathfrak{Q}+R^{\mathrm{VI}}\\&\quad-XP'''-YQ'''-ZR'''-\mathfrak{P}S'''-\mathfrak{Q}T''')\zeta\\+&(S'X+S''Y+S'''Z+S^{\mathrm{IV}}\mathfrak{P}+S^{\mathrm{V}}\mathfrak{Q}+S^{\mathrm{VI}}\\&\quad-XP^{\mathrm{IV}}-YQ^{\mathrm{IV}}-ZR^{\mathrm{IV}}-\mathfrak{P}S^{\mathrm{IV}}-\mathfrak{Q}T^{\mathrm{IV}})\pi\\+&(T'X+T''Y+T'''Z+T^{\mathrm{IV}}\mathfrak{P}+T^{\mathrm{V}}\mathfrak{Q}+T^{\mathrm{VI}}\\&\quad-XP^{\mathrm{V}}-YQ^{\mathrm{V}}-ZR^{\mathrm{V}}-\mathfrak{P}S^{\mathrm{V}}-\mathfrak{Q}T^{\mathrm{V}})\mathfrak{q}.\end{aligned}$$

Der Quotient $\dfrac{\frac{\partial}{\partial u}(P\chi+Q\eta+R\zeta+S\pi+T\mathfrak{q})}{P\chi+Q\eta+R\zeta+S\pi+T\mathfrak{q})}$ wird nun bei Vertauschung von χ, η, ζ, π, $\mathfrak{q}$ mit χ', η', ζ', π', $\mathfrak{q}'$; χ'', η'', ζ'', π'', $\mathfrak{q}''$; ....; χ^{IV}, η^{IV}, ζ^{IV}, π^{IV}, $\mathfrak{q}^{\mathrm{IV}}$ denselben Werth behalten, wenn sich der Zähler auf die Form $MP\chi+MQ\eta+MR\zeta+MS\pi+MT\mathfrak{q}$ bringen lässt, weil dann auch die Quotienten in M übergehen. Jenes wird aber stattfinden, wenn man folgende Gleichungen annimmt:

$$2)\quad Q\,[P^{VI} + (P'' - Q')\,Y + (P''' - R')\,Z + (P^{IV} - S')\,\mathfrak{P} + (P^{V} - T')\,\mathfrak{Q}]$$
$$= P\,[Q^{VI} + (Q' - P'')\,X + (Q'' - R'')\,Z + (Q^{IV} - S'')\,\mathfrak{P} + (Q^{V} - T'')\,\mathfrak{Q}]$$

$$3)\quad R\,[P^{VI} + (P'' - Q')\,Y + (P''' - R')\,Z + (F^{IV} - S')\,\mathfrak{P} + (P^{V} - T')\,\mathfrak{Q}]$$
$$= P\,[R^{VI} + (R' - P''')\,X + (R'' - Q''')\,Y + (R^{IV} - S''')\,\mathfrak{P} + (R^{V} - T''')\,\mathfrak{Q}]$$

$$4)\quad S\,[(P^{VI} + (P'' - Q')\,Y + (P''' - R')\,Z + (P^{IV} - S')\,\mathfrak{P} + (P^{V} - T')\,\mathfrak{Q}]$$
$$= P\,[S^{VI} + (S' - P^{IV})\,X + (S'' - Q^{IV})\,Y - (S''' - R^{IV})\,Z + (S^{V} - T^{IV})\,\mathfrak{Q}]$$

$$5)\quad T\,[P^{VI} + (P'' - Q')\,Y + (P''' - R')\,Z + (P^{IV} - S')\,\mathfrak{P} + (P^{V} - T')\,\mathfrak{Q}]$$
$$= P\,[T^{VI} + (T' - P^{V})\,X + (T'' - Q^{V})\,Y + (T''' - R^{V})\,Z + (T^{IV} - S^{V})\,\mathfrak{P}].$$

Aus diesen vier Gleichungen, zu denen noch die erste

$$1)\quad PX + QY + RZ + S\mathfrak{P} + T\mathfrak{Q} = 1$$

hinzutritt, muss man [99] die fünf Grössen X, Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bestimmen. Nach gehöriger Ausführung der Rechnungen ergiebt sich $Y = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ wobei

$$\mathfrak{M} = \left\{\begin{array}{l} (PR^{V} - RP^{V} + RT' - TR' + TP''' - PT''') \\ \qquad \times (SP^{VI} - PS^{VI} + P^{IV} - S') \\ - (PR^{IV} - RP^{IV} + RS' - SR' + SP''' - PS''') \\ \qquad \times (TP^{VI} - PT^{VI} + P^{V} - T') \\ - (PS^{V} - SP^{V} + ST' - TS' + TP^{IV} - PT^{IV}) \\ \qquad \times (RP^{VI} - PR^{VI} + P''' - R') \end{array}\right.$$

$$\mathfrak{N} = \left\{\begin{array}{l} (PR^{IV} - RP^{IV} + RS' - SR' + SP''' - PS''') \\ \times (PQ^{V} - QP^{V} + QT' - TQ' + TP'' - PT'') \\ - (PR^{V} - RP^{V} + RT' - TR' + TP''' - PT''') \\ \times (PQ^{IV} - QP^{IV} + QS' - SQ' + SP'' - PS'') \\ + (PS^{V} - SP^{V} + ST' - TS' + TP^{IV} - PT^{IV}) \\ \times (PQ''' - QP''' + QR' - RQ' + RP'' - PR''). \end{array}\right.$$

Aus Y geht Z hervor, wenn man die Buchstaben Q und R miteinander vertauscht und die Indices $''$ und $'''$. Ebenso ergiebt sich $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ aus Y, indem man in dem Ausdruck für Y die Buchstaben Q und S oder Q und T vertauscht und gleichzeitig die Indices $''$ und ^{IV} oder $''$ und ^{V}. Dabei bleibt der Nenner abgesehen vom Vorzeichen ungeändert. Was X anbetrifft, so ist, nachdem man Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ gefunden hat, $X = \frac{1 - QY - RZ - S\mathfrak{P} - T\mathfrak{Q}}{P}$, oder es ergiebt sich auch X aus Y, indem man die Buchstaben P und Q und die Indices $'$ und $''$ miteinander vertauscht.

Sind auf diese Weise X, Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bestimmt, so denke man sich a, b, c, e, g als constant und drücke aus den Gleichungen

$$dx = X du,$$
$$dy = Y du,$$
$$dz = Z du,$$
$$dp = \mathfrak{P} du,$$
$$dq = \mathfrak{Q} du$$

nach § 2 x, y, z, p, q durch u und durch fünf willkürliche Constanten a, b, c, e, g aus, die durch die Integration hineinkommen. Dann werden diese Ausdrücke, wenn man nunmehr a, b, c, e, g als Veränderliche betrachtet, Functionen von u, a, b, c, e, g darstellen, die so beschaffen sind, dass durch ihre Einsetzung an Stelle von x, y, z, p, q die vorgelegte Differentialgleichung in eine Gleichung zwischen den fünf Grössen a, b, c, e, g und ihren Differentialen übergeht. Nun ist aber nach dem Problem III die Integration dieser transformirten Gleichung in den folgenden drei Gleichungen enthalten:

1) $F(a, b, c, e, g) = \psi[f(a, b, c, e, g), g]$

2) $F_1(a, b, c, e, g) = \psi_f'$

3) $F_2(a, b, c, e, g) = \psi_g'$.

[100] Da man sich aber die einzelnen Grössen a, b, c, e, g durch x, y, z, p, q und u ausgedrückt denken kann, so können die mit den Buchstaben F, F_1, F_2, f bezeichneten Functionen und ebenso die Grösse g als gegebene Functionen

von x, y, z, p, q, u betrachtet werden. Mithin ist die Integration der vorgelegten Gleichung durch die folgenden Gleichungen definitiv erledigt:

$$1)\quad F(x, y, z, p, q, u) = \psi[f(x, y, z, p, q, u),\ f_1(x, y, z, p, q, u)]$$

$$2)\quad F_1(x, y, z, p, q, u) = \psi'_f$$

$$3)\quad F_2(x, y, z, p, q, u) = \psi'_{f_1}.$$

§ 8.

Wenn man bei der vorstehenden Lösung den Zähler und den Nenner der Formel für Y entwickelt, indem man die Multiplication wirklich ausführt, so reduciren sich die 72 Glieder des ersteren auf 36, die 108 Glieder des letzteren auf 60, während sich die übrigen Glieder paarweise fortheben. Dividirt man noch Zähler und Nenner durch den gemeinsamen Factor P und setzt $\frac{\mathfrak{M}}{P} = \mathfrak{M}'$, $\frac{\mathfrak{N}}{P} = \mathfrak{N}'$, so ergiebt sich $Y = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}'}$, und es ist

$$\mathfrak{M}' = \begin{cases} \quad P(T'''S^{VI} - T^{VI}S''' + R^{VI}S^{V} - R^{V}S^{VI} + T^{VI}R^{IV} - T^{IV}R^{VI}) \\ + R(S'T^{VI} - S^{VI}T' + P^{V}S^{VI} - P^{VI}S^{V} + T^{IV}P^{VI} - T^{VI}P^{IV}) \\ + S(R^{V}P^{VI} - R^{VI}P^{V} + T^{VI}P''' - T'''P^{VI} + R^{VI}T' - R'T^{VI}) \\ + T(R'S^{VI} - R^{VI}S' + S'''P^{VI} - S^{VI}P''' + R^{VI}P^{IV} - R^{IV}P^{VI}) \\ + R^{V}P^{IV} - R^{IV}P^{V} + R'S^{V} - R^{V}S' + T^{IV}P''' - T'''P^{IV} \\ + S'''P^{V} - S^{V}P''' + S'T''' - S'''T' + R^{IV}T' - R'T^{IV}, \end{cases}$$

ferner

$$\mathfrak{N}' = \begin{cases} \quad P\begin{pmatrix} S^{V}Q'' - S'''Q^{V} + S'''T'' - S''T''' + R^{IV}Q^{V} - R^{V}Q^{IV} \\ + R''T^{IV} - R^{IV}T'' + R^{V}S'' - R''S^{V} + T'''Q^{IV} - T^{IV}Q'' \end{pmatrix} \\ + Q\begin{pmatrix} S'T''' - S'''T' + S'''P^{V} - S^{V}P''' + R^{IV}T' - R'T^{IV} \\ + R^{V}P^{IV} - R^{IV}P^{V} + R'S^{V} - R^{V}S' + P'''T^{IV} - P^{IV}T''' \end{pmatrix} \\ + R\begin{pmatrix} S'Q^{V} - S^{V}Q' + T'S'' - T''S' + P^{V}Q^{IV} - P^{IV}Q^{V} \\ + P^{IV}T'' - P''T^{IV} + Q'T^{IV} - Q^{IV}T' + P''S^{V} - P^{V}S'' \end{pmatrix} \\ + S\begin{pmatrix} Q'R^{V} - Q^{V}R' + R'T'' - R''T' + P'''Q^{V} - P^{V}Q''' \\ + P''T''' - P'''T'' + R''P^{V} - R^{V}P'' + Q'''T' - Q'T''' \end{pmatrix} \\ + T\begin{pmatrix} S'''Q' - S'Q''' + S''P''' - S'''P'' + R'Q^{IV} - R^{IV}Q' \\ + R^{IV}P'' - R''P^{IV} + R''S' - R'S'' + P^{IV}Q''' - P'''Q^{IV} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

[**101**] Aus Y lassen sich die vier übrigen Grössen X, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ in der oben (§ 7) angegebenen Weise leicht ableiten. Uebrigens ist nach dieser Umformung der Nenner allen fünf Grössen gemeinsam, was von dem Nenner der im vorigen Paragraphen für Y gefundenen Formel in Bezug auf X nicht gilt.

§ 9.

Problem VI.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung in sieben Veränderlichen durch ein System von vier Gleichungen zu integriren.

Lösung.

Es sei in den sieben Veränderlichen u, x, y, z, t, p, q folgende Differentialgleichung vorgelegt:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt + Tdp + Udq\,,$$

wobei P, Q, R, S, T, U irgend welche gegebenen Functionen jener Veränderlichen sind. Denkt man sich nun die Grösse q als constant, so geht die Gleichung über in eine Gleichung in sechs Veränderlichen. Diese wird sich nach dem vorigen Problem (§ 8) durch ein System von drei Gleichungen folgender Form integriren lassen:

$$1)\quad F(u,x,y,z,t,p) = \psi\,[f(u,x,y,z,t,p),\ f_1(u,x,y,z,t,p)],$$

$$2)\quad F_1(u,x,y,z,t,p) = \psi'_f$$

$$3)\quad F_2(u,x,y,z,t,p) = \psi'_{f_1}.$$

Diese Gleichungen gehen aber auf Grund derselben Überlegungen, wie sie oben in § 5 entwickelt worden sind, in folgende über

$$1)\quad F(u,x,y,z,t,p,q) = \psi\,[f(u,x,y,z,t,p,q)\,,\ f_1(u,x,y,z,t,p,q),\ q]$$

$$2)\quad F_1(u,x,y,z,t,p,q) = \psi'_f$$

$$3)\quad F_2(u,x,y,z,t,p,q) = \psi'_{f_1}.$$

Nimmt man dann das vollständige Differential der ersten Gleichung, indem man die Grösse q auch als eine Veränderliche behandelt, und setzt man für ψ'_f und ψ'_{f_1} die Ausdrücke aus den Gleichungen 2) und 3) ein, so tritt zu jenen drei Gleichungen noch eine vierte von folgender Form:

$$4)\quad F_3(u,x,y,z,t,p,q) = \psi'_q.$$

[102] Dies stützt sich auf dieselben Überlegungen, die wir oben in § 5 ausführlicher begründet haben und deren Wiederholung überflüssig ist. Durch diese vier Gleichungen ist also die Integration der vorgelegten Gleichung erledigt. Dass die Zeichen F, F_1, F_2, F_3, f, f_1 gegebene Functionen bedeuten, das Zeichen ψ eine willkürliche Function, ist aus dem Früheren bekannt (§ 3).

§ 10.

Problem VII.

Eine partielle Differentialgleichung in fünf Veränderlichen u, x, y, z, t vollständig zu integriren.

Lösung.

Es sei $du = p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,dt$. Dann ist eine Relation zwischen den vier Ableitungen p, q, r, s und den fünf Veränderlichen gegeben, aus der eine Relation zwischen diesen Veränderlichen selbst ermittelt werden soll. Man kann jene Gleichung als eine gewöhnliche Differentialgleichung in den acht Veränderlichen u, x, y, z, t, p, q, r betrachten. Die Grösse s ist ausgeschlossen, weil sie durch die übrigen gegeben ist. Diese Gleichung ist durch ein System von vier Gleichungen zu integriren, aus denen sich dann durch Elimination von p, q, r die gesuchte Gleichung zwischen u, x, y, z, t ergiebt. Nun ist aber aus dem vorigen Problem bekannt, dass eine gewöhnliche Differentialgleichung in sieben Veränderlichen durch ein System von vier Gleichungen integrirt wird. Es kommt also darauf an, unsere vorgelegte Gleichung in eine Differentialgleichung in sieben Veränderlichen zu transformiren.

Zu diesem Zweck wollen wir uns denken, dass für x, y, z, u, p, q, r Functionen der Grösse t und sieben neuer Grössen a, b, c, e, f, g, h eingesetzt werden, und es sei

$$\begin{aligned}
dx &= X\,dt + \chi\,da + \chi'\,db + \chi''\,dc + \chi'''\,de + \chi^{\mathrm{IV}}\,df + \chi^{\mathrm{V}}\,dg + \chi^{\mathrm{VI}}\,dh\\
dy &= Y\,dt + \eta\,da + \eta'\,db + \cdots\cdots + \eta^{\mathrm{VI}}\,dh\\
dz &= Z\,dt + \zeta\,da + \zeta'\,db + \cdots\cdots + \zeta^{\mathrm{VI}}\,dh\\
du &= U\,dt + v\,da + v'\,db + \cdots\cdots + v^{\mathrm{VI}}\,dh\\
dp &= \mathfrak{P}\,dt + \pi\,da + \pi'\,db + \cdots\cdots + \pi^{\mathrm{VI}}\,dh\\
dq &= \mathfrak{Q}\,dt + \mathfrak{q}\,da + \mathfrak{q}'\,db + \cdots\cdots + \mathfrak{q}^{\mathrm{VI}}\,dh\\
dr &= \mathfrak{R}\,dt + \mathfrak{r}\,da + \mathfrak{r}'\,db + \cdots\cdots + \mathfrak{r}^{\mathrm{VI}}\,dh.
\end{aligned}$$

Ferner sei

$$ds = s' dx + s'' dy + s''' dz + s^{\mathrm{IV}} dt + s^{\mathrm{V}} du + s^{\mathrm{VI}} dp + s^{\mathrm{VII}} dq + s^{\mathrm{VIII}} dr,$$

wo s', s'', s''', ..., s^{VIII}, ebenso wie s selbst, gegebene Functionen von x, y, z, t, u, p, q, r sind. [**103**] Nunmehr verwandelt sich die Gleichung $du = pdx + qdy + rdz + sdt$ in folgende:

$$0 = (pX + qY + rZ + s - U)\,dt + (p\chi + q\eta + r\zeta - v)\,da + (p\chi' + q\eta' + r\zeta' - v')\,db + \cdots + (p\chi^{\mathrm{VI}} + q\eta^{\mathrm{VI}} + r\zeta^{\mathrm{VI}} - v^{\mathrm{VI}})\,dh.$$

Aus ihr muss man dt und t beseitigen. Mithin ist zu setzen

$$1) \qquad U = pX + qY + rZ + s.$$

Ferner muss der Quotient

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}(v - p\chi - q\eta - r\zeta)}{v - p\chi - q\eta - r\zeta}$$

denselben Werth behalten, wenn man sich an Stelle der Buchstaben v, χ, η, ζ dieselben, versehen mit den Indices I, II, ..., VI, gesetzt denkt. Nun ist aber $\frac{\partial}{\partial t}(v - p\chi - q\eta - r\zeta)$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} - p\frac{\partial \chi}{\partial t} - q\frac{\partial \eta}{\partial t} - r\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \chi\frac{\partial p}{\partial t} - \eta\frac{\partial q}{\partial t} - \zeta\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial a} - p\frac{\partial X}{\partial a} - q\frac{\partial Y}{\partial a} - r\frac{\partial Z}{\partial a} - \chi\frac{\partial p}{\partial t} - \eta\frac{\partial q}{\partial t} - \zeta\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial a}(U - pX - qY - rZ) \\ + X\frac{\partial p}{\partial a} + Y\frac{\partial q}{\partial a} + Z\frac{\partial r}{\partial a} - \chi\frac{\partial p}{\partial t} - \eta\frac{\partial q}{\partial t} - \zeta\frac{\partial r}{\partial t} \end{cases}$$

$$= \frac{\partial s}{\partial a} + X\frac{\partial p}{\partial a} + Y\frac{\partial q}{\partial a} + Z\frac{\partial r}{\partial a} - \chi\frac{\partial p}{\partial t} - \eta\frac{\partial q}{\partial t} - \zeta\frac{\partial r}{\partial t}.$$

Andererseits ist $\frac{\partial p}{\partial a} = \pi$, $\frac{\partial q}{\partial a} = \mathfrak{q}$, $\frac{\partial r}{\partial a} = \mathfrak{r}$,

$$\frac{\partial s}{\partial a} = s'\frac{\partial x}{\partial a} + s''\frac{\partial y}{\partial a} + s'''\frac{\partial z}{\partial a} + s^{\mathrm{V}}\frac{\partial u}{\partial a} + s^{\mathrm{VI}}\frac{\partial p}{\partial a} + s^{\mathrm{VII}}\frac{\partial q}{\partial a} + s^{\mathrm{VIII}}\frac{\partial r}{\partial a}$$

$$= s'\chi + s''\eta + s'''\zeta + s^{\mathrm{V}} v + s^{\mathrm{VI}}\pi + s^{\mathrm{VII}}\mathfrak{q} + s^{\mathrm{VIII}}\mathfrak{r},$$

ferner

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathfrak{P}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \mathfrak{Q}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \mathfrak{R}.$$

Es wird daher

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}(v - p\chi - q\eta - r\zeta)}{v - p\chi - q\eta - r\zeta}$$

$$= \frac{(s' - \mathfrak{P})\chi + (s'' - \mathfrak{Q})\eta + (s''' - \mathfrak{R})\zeta + s^{\mathrm{V}} v + (s^{\mathrm{VI}} + X)\pi + (s^{\mathrm{VII}} + Y)\mathfrak{q} + (s^{\mathrm{VIII}} + Z)\mathfrak{r}}{v - p\chi - q\eta - r\zeta}.$$

Aus diesem Bruche gehen die Buchstaben χ, η, ζ, v und ebenso π, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ heraus, wenn folgende Gleichungen angenommen werden:

$$2)\qquad s' - \mathfrak{P} = -s^{\mathrm{V}} p$$

$$3)\qquad s'' - \mathfrak{Q} = -s^{\mathrm{V}} q$$

$$4)\qquad s''' - \mathfrak{R} = -s^{\mathrm{V}} r$$

[104]

$$5)\qquad s^{\mathrm{VI}} + X = 0$$

$$6)\qquad s^{\mathrm{VII}} + Y = 0$$

$$7)\qquad s^{\mathrm{VIII}} + Z = 0.$$

Es wird daher

$$X = -s^{\mathrm{VI}}$$

$$Y = -s^{\mathrm{VII}}$$

$$Z = -s^{\mathrm{VIII}}$$

$$\mathfrak{P} = s' + s^{\mathrm{V}} \cdot p$$

$$\mathfrak{Q} = s'' + s^{\mathrm{V}} \cdot q$$

$$\mathfrak{R} = s''' + s^{\mathrm{V}} \cdot r.$$

Endlich ergiebt sich aus 1)

$$U = pX + qY + rZ + s$$

$$= s - ps^{\mathrm{VI}} - qs^{\mathrm{VII}} - rs^{\mathrm{VIII}}.$$

Auf diese Weise sind also die sieben Grössen X, Y, Z, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, U als gegebene Functionen von x, y, z, u, p, q, r, t ausgedrückt.

Denken wir uns jetzt a, b, c, e, f, g, h als constant und suchen wir aus den Hilfsgleichungen

$$\begin{aligned} dx &= X dt \\ dy &= Y dt \\ dz &= Z dt \\ du &= U dt \\ dp &= \mathfrak{P} dt \\ dq &= \mathfrak{Q} dt \\ dr &= \mathfrak{R} dt \end{aligned}$$

die Werthe von x, y, z, u, p, q, r, ausgedrückt durch t und sieben willkürliche Constanten a, b, c, e, f, g, h, die durch die Integration hineinkommen (§ 2). Dann werden eben diese Werthe, falls man bei der Bildung ihrer vollständigen Differentiale die genannten Constanten als Veränderliche behandelt, die vorgeschriebene Bedingung erfüllen, d. h. wenn man sie an Stelle von x, y, z, u, p, q, r einsetzt, so geht die vorgelegte Gleichung

$$du = p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,dt$$

über in eine andere, die nicht mehr t und dt sondern nur die sieben Grössen a, b, c, e, f, g, h und deren Differentiale enthält. Die Integration dieser transformirten Gleichung erledigt sich nach dem vorigen Problem (§ 9) durch folgende vier Gleichungen:

[105]
$$\begin{aligned} &1)\quad F(a, \ldots\ldots, h) = \psi[f(a, \ldots, h), f_1(a, \ldots, h), h] \\ &2)\quad F_1(a, \ldots\ldots, h) = \psi'_f \\ &3)\quad F_2(a, \ldots\ldots, h) = \psi'_{f_1} \\ &4)\quad F_3(a, \ldots\ldots, h) = \psi'_h . \end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt die Grössen a, b, c, e, f, g, h ausgedrückt durch x, y, z, u, p, q, r und durch t, so nehmen diese vier Gleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} &1)\quad F(x, y, z, u, t, u, p, q, r) = \psi[f(x, \ldots, r), f_1(x, \ldots, r), f_2(x, \ldots, r)] \\ &2)\quad F_1(x, \ldots, r) = \psi'_f \\ &3)\quad F_2(x, \ldots, r) = \psi'_{f_1} \\ &4)\quad F_3(x, \ldots, r) = \psi'_{f_2} . \end{aligned}$$

Wenn man sich aus ihnen die drei Ableitungen p, q, r eliminirt denkt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen den Veränderlichen x, y, z, t, u selbst. Hierin liegt die Integration, und zwar die vollständige wegen der willkürlichen Function dreier Grössen.

§ 11.

Problem VIII.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung in acht Veränderlichen durch ein System von vier Gleichungen zu integriren.

Lösung.

Es sei folgende Gleichung in den acht Veränderlichen u, x, y, z, t, p, q, r vorgelegt:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt + Tdp + Udq + Wdr.$$

Da $P, Q, \ldots, W$ gegebene Functionen von $u, x, y, \ldots, r$ sind, so hat man zu setzen

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dz + P^{\mathrm{IV}}dt + P^{\mathrm{V}}dp + P^{\mathrm{VI}}dq + P^{\mathrm{VII}}dr + P^{\mathrm{VIII}}du,$$

und in ähnlicher Weise kann man $dQ, dR, \ldots, dW$ ausdrücken, wobei

$$P', P'', \ldots, P^{\mathrm{VIII}};\ Q', \ldots, Q^{\mathrm{VIII}};\ R', \ldots, R^{\mathrm{VIII}};\ \ldots;\ W', \ldots, W^{\mathrm{VIII}}$$

wieder gegebene Functionen sind. Da nun nach Problem VI (§ 9) eine Differentialgleichung in sieben Veränderlichen durch ein System von vier Gleichungen integrirbar ist, so ist nichts weiter erforderlich als eine Transformation der vorgelegten Gleichung in eine Gleichung zwischen sieben Veränderlichen, die $a, b, \ldots, h$ sein mögen. Zu diesem Zweck wollen wir in der bisher befolgten Weise setzen

$$\begin{aligned} dx &= Xdu + \chi da + \chi' db + \ldots + \chi^{\mathrm{VI}} dh \\ dy &= Ydu + \eta da + \ldots \ldots \\ dz &= Zdu + \zeta da + \ldots \ldots \\ dt &= \mathfrak{T}du + \tau da + \ldots \ldots \end{aligned} \quad [106]$$

$$dp = \mathfrak{P}du + \pi da + \ldots\ldots$$
$$dq = \mathfrak{Q}du + \mathfrak{q}da + \ldots\ldots$$
$$dr = \mathfrak{R}du + \mathfrak{r}da + \ldots\ldots$$

Dann geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$\begin{aligned}0 = (PX + QY + RZ + S\mathfrak{T} + T\mathfrak{P} + U\mathfrak{Q} + W\mathfrak{R} - 1)\,du \\ + (P\chi + Q\eta + R\zeta + S\tau + T\pi + U\mathfrak{q} + W\mathfrak{r})\,da \\ + (P\chi' + Q\eta' + R\zeta' + S\tau' + T\pi' + U\mathfrak{q}' + W\mathfrak{r}')\,db \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (P\chi^{\mathrm{VI}} + Q\eta^{\mathrm{VI}} + R\zeta^{\mathrm{VI}} + S\tau^{\mathrm{VI}} + T\pi^{\mathrm{VI}} + U\mathfrak{q}^{\mathrm{VI}} + W\mathfrak{r}^{\mathrm{VI}})\,dh.\end{aligned}$$

Soll diese Gleichung von du und u frei werden, so hat man zu setzen

$$1)\quad 1 = PX + QY + RZ + S\mathfrak{T} + T\mathfrak{P} + U\mathfrak{Q} + W\mathfrak{R}.$$

Ferner muss der Quotient

$$\frac{\frac{\partial}{\partial u}(P\chi + Q\eta + R\zeta + S\tau + T\pi + U\mathfrak{q} + W\mathfrak{r})}{P\chi + Q\eta + R\zeta + S\tau + T\pi + U\mathfrak{q} + W\mathfrak{r}}$$

denselben Wert behalten, wenn man

$$\chi',\ \eta',\ \ldots,\ \mathfrak{r}';\ \ldots;\ \chi^{\mathrm{VI}},\ \eta^{\mathrm{VI}},\ \ldots,\ \mathfrak{r}^{\mathrm{VI}}$$

für $\chi, \eta, \ldots, \mathfrak{r}$ setzt.

Der Zähler ist aber

$$= \left\{\begin{aligned} P\frac{\partial\chi}{\partial u} + Q\frac{\partial\eta}{\partial u} + R\frac{\partial\zeta}{\partial u} + S\frac{\partial\tau}{\partial u} + T\frac{\partial\pi}{\partial u} + U\frac{\partial\mathfrak{q}}{\partial u} + W\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial u} \\ + \chi\frac{\partial P}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q}{\partial u} + \zeta\frac{\partial R}{\partial u} + \tau\frac{\partial S}{\partial u} + \pi\frac{\partial T}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial U}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial W}{\partial u}\end{aligned}\right.$$

$$= \left\{\begin{aligned} P\frac{\partial X}{\partial a} + Q\frac{\partial Y}{\partial a} + R\frac{\partial Z}{\partial a} + S\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial a} + T\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial a} + U\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial a} + W\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial a} \\ + \chi\frac{\partial P}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q}{\partial u} + \zeta\frac{\partial R}{\partial u} + \tau\frac{\partial S}{\partial u} + \pi\frac{\partial T}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial U}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial W}{\partial u}\end{aligned}\right.$$

$$= \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}(PX + QY + RZ + S\mathfrak{T} + T\mathfrak{P} + U\mathfrak{Q} + W\mathfrak{R}) \\ - X\frac{\partial P}{\partial a} - Y\frac{\partial Q}{\partial a} - Z\frac{\partial R}{\partial a} - \mathfrak{T}\frac{\partial S}{\partial a} - \mathfrak{P}\frac{\partial T}{\partial a} - \mathfrak{Q}\frac{\partial U}{\partial a} - \mathfrak{R}\frac{\partial W}{\partial a} \\ + \chi\frac{\partial P}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q}{\partial u} + \zeta\frac{\partial R}{\partial u} + \tau\frac{\partial S}{\partial u} + \pi\frac{\partial T}{\partial u} + \mathfrak{q}\frac{\partial U}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial W}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

wo der erste Bestandtheil nach Gleichung 1) verschwindet. Es ist ferner

$$\frac{\partial P}{\partial a} = P' \frac{\partial x}{\partial a} + P'' \frac{\partial y}{\partial a} + P''' \frac{\partial z}{\partial a} + P^{IV} \frac{\partial t}{\partial a} + P^{V} \frac{\partial p}{\partial a} + P^{VI} \frac{\partial q}{\partial a} + P^{VII} \frac{\partial r}{\partial a}$$

$$= P'\chi + P''\eta + P'''\zeta + P^{IV}\tau + P^{V}\pi + P^{VI}\mathfrak{q} + P^{VII}\mathfrak{r}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = P' \frac{\partial x}{\partial u} + P'' \frac{\partial y}{\partial u} + P''' \frac{\partial z}{\partial u} + P^{IV} \frac{\partial t}{\partial u} + P^{V} \frac{\partial p}{\partial u} + P^{VI} \frac{\partial q}{\partial u} + P^{VII} \frac{\partial r}{\partial u} + P^{VIII}$$

$$= P'X + P''Y + P'''Z + P^{IV}\mathfrak{T} + P^{V}\mathfrak{P} + P^{VI}\mathfrak{Q} + P^{VII}\mathfrak{R} + P^{VIII}.$$

[107] In ähnlicher Weise drücken sich $\frac{\partial Q}{\partial a}, \frac{\partial R}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial a}$ und $\frac{\partial Q}{\partial u}, \frac{\partial R}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial u}$ aus. Der erwähnte Zähler wird daher gleich

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{l} P'X + P''Y + P'''Z + P^{IV}\mathfrak{T} + P^{V}\mathfrak{P} + P^{VI}\mathfrak{Q} \\ \qquad + P^{VII}\mathfrak{R} + P^{VIII} \\ - XP' - YQ' - ZR' - \mathfrak{T}S' - \mathfrak{P}T' - \mathfrak{Q}U' - \mathfrak{R}W' \end{array}\right)\chi \\
+&\left(\begin{array}{l} Q'X + Q''Y + Q'''Z + Q^{IV}\mathfrak{T} + Q^{V}\mathfrak{P} + Q^{VI}\mathfrak{Q} \\ \qquad + Q^{VII}\mathfrak{R} + Q^{VIII} \\ - XP'' - YQ'' - ZR'' - \mathfrak{T}S'' - \mathfrak{P}T'' - \mathfrak{Q}U'' - \mathfrak{R}W'' \end{array}\right)\eta \\
+&\left(\begin{array}{l} R'X + R''Y + R'''Z + R^{IV}\mathfrak{T} + R^{V}\mathfrak{P} + R^{VI}\mathfrak{Q} \\ \qquad + R^{VII}\mathfrak{R} + R^{VIII} \\ - XP''' - YQ''' - ZR''' - \mathfrak{T}S''' - \mathfrak{P}T''' - \mathfrak{Q}U''' - \mathfrak{R}W''' \end{array}\right)\zeta \\
+&\left(\begin{array}{l} S'X + S''Y + S'''Z + S^{IV}\mathfrak{T} + S^{V}\mathfrak{P} + S^{VI}\mathfrak{Q} \\ \qquad + S^{VII}\mathfrak{R} + S^{VIII} \\ - XP^{IV} - YQ^{IV} - ZR^{IV} - \mathfrak{T}S^{IV} - \mathfrak{P}T^{IV} - \mathfrak{Q}U^{IV} - \mathfrak{R}W^{IV} \end{array}\right)\tau \\
+&\left(\begin{array}{l} T'X + T''Y + T'''Z + T^{IV}\mathfrak{T} + T^{V}\mathfrak{P} + T^{VI}\mathfrak{Q} \\ \qquad + T^{VII}\mathfrak{R} + T^{VIII} \\ - XP^{V} - YQ^{V} - ZR^{V} - \mathfrak{T}S^{V} - \mathfrak{P}T^{V} - \mathfrak{Q}U^{V} - \mathfrak{R}W^{V} \end{array}\right)\pi \\
+&\left(\begin{array}{l} U'X + U''Y + U'''Z + U^{IV}\mathfrak{T} + U^{V}\mathfrak{P} + U^{VI}\mathfrak{Q} \\ \qquad + U^{VII}\mathfrak{R} + U^{VIII} \\ - XP^{VI} - YQ^{VI} - ZR^{VI} - \mathfrak{T}S^{VI} - \mathfrak{P}T^{VI} - \mathfrak{Q}U^{VI} - \mathfrak{R}W^{VI} \end{array}\right)\mathfrak{q}
\end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{l} W'X+W''Y+W'''Z+W^{IV}\mathfrak{T}+W^{V}\mathfrak{P} \\ \quad +W^{VI}\mathfrak{Q}+W^{VII}\mathfrak{R}+W^{VIII} \\ -XP^{VII}-YQ^{VII}-ZR^{VII}-\mathfrak{T}S^{VII}-\mathfrak{P}T^{VII}-\mathfrak{Q}U^{VII} \\ \quad -\mathfrak{R}W^{VII} \end{array}\right\}\mathfrak{r}.$$

Wenn dieser Zähler auf die Form

$$M(P\chi+Q\eta+R\zeta+S\tau+T\pi+U\mathfrak{q}+W\mathfrak{r})$$

gebracht wird, so ist die oben aufgestellte Forderung erfüllt. Daraus ergeben sich aber die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{array}{rl} 2) & 0=P^{VIII}Q-PQ^{VIII}-P(Q'-P'')X+Q(P''-Q')Y \\ & +[Q(P'''-R')-P(Q'''-R'')]Z \\ & +[Q(P^{IV}-S')-P(Q^{IV}-S'')]\mathfrak{T} \\ & +[Q(P^{V}-T')-P(Q^{V}-T'')]\mathfrak{P} \\ & +[Q(P^{VI}-U')-P(Q^{VI}-U'')]\mathfrak{Q} \\ & +[Q(P^{VII}-W')-P(Q^{VII}-W'')]\mathfrak{R}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 3) & 0=RP^{VIII}-PR^{VIII}-P(R'-P''')X \\ & \qquad +[R(P''-Q')-P(R''-Q''')]Y \\ & +R(P'''-R')Z+[R(P^{IV}-S')-P(R^{IV}-S''')]\mathfrak{T} \\ & +[R(P^{V}-T')-P(R^{V}-T''')]\mathfrak{P} \\ & \qquad +[R(P^{VI}-U')-P(R^{VI}-U''')]\mathfrak{Q} \\ & +[R(P^{VII}-W')-P(R^{VII}-W''')]\mathfrak{R}, \end{array}$$

[108]

$$\begin{array}{rl} 4) & 0=SP^{VIII}-PS^{VIII}-P(S'-P^{IV})X \\ & \qquad +[S(P''-Q')-P(S''-Q^{IV})]Y \\ & +[S(P'''-R')-P(S'''-R^{IV})]Z+S(P^{IV}-S')\mathfrak{T} \\ & +[S(P^{V}-T')-P(S^{V}-T^{IV})]\mathfrak{P} \\ & \qquad +[S(P^{VI}-U')-P(S^{VI}-U^{IV})]\mathfrak{Q} \\ & +[S(P^{VII}-W')-P(S^{VII}-W^{IV})]\mathfrak{R}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 5) & 0=TP^{VIII}-PT^{VIII}-P(T'-P^{V})X \\ & \qquad +[T(P''-Q')-P(T''-Q^{V})]Y \\ & +[T(P'''-R')-P(T'''-R^{V})]Z \\ & \qquad +[T(P^{IV}-S')-P(T^{IV}-S^{V})]\mathfrak{T} \\ & +T(P^{V}-T')\mathfrak{P}+[T(P^{VI}-U')-P(T^{VI}-U^{V})]\mathfrak{Q} \\ & +[T(P^{VII}-W')-P(T^{VII}-W^{V})]\mathfrak{R}, \end{array}$$

$$6)\quad 0 = UP^{VIII} - PU^{VIII} - P(U' - P^{VI})X$$
$$+ [U(P'' - Q') - P(U'' - Q^{VI})]\,Y$$
$$+ [U(P''' - R') - P(U''' - R^{VI})]\,Z$$
$$+ [U(P^{IV} - S') - P(U^{IV} - S^{VI})]\,\mathfrak{T}$$
$$+ [U(P^{V} - T') - P(U^{V} - T^{VI}]\,\mathfrak{P} + U(P^{VI} - U')\mathfrak{Q}$$
$$+ [U(P^{VII} - W') - P(U^{VII} - W^{VI})]\,\mathfrak{R},$$

$$7)\quad 0 = WP^{VIII} - PW^{VIII} - P(W' - P^{VII})X$$
$$+ [W(P'' - Q') - P(W'' - Q^{VII})]\,Y$$
$$+ [W(P''' - R') - P(W''' - R^{VII})]\,Z$$
$$+ [W(P^{IV} - S') - P(W^{IV} - S^{VII})]\,\mathfrak{T}$$
$$+ [W(P^{V} - T') - P(W^{V} - T^{VII})]\,\mathfrak{P}$$
$$+ [W(P^{VI} - U') - P(W^{VI} - U^{VII})]\,\mathfrak{Q}$$
$$+ W(P^{VII} - W')\,\mathfrak{R}.$$

Aus diesen sechs Gleichungen, verbunden mit der ersten 1) sind die sieben Grössen X, Y, Z, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ zu bestimmen. Setzen wir diese Bestimmung voraus (die nach den gewöhnlichen Eliminationsregeln allerdings äusserst umfangreiche Rechnungen erfordert, von deren Abkürzung weiter unten die Rede sein wird), so sind jene Grössen als gegebene Functionen von unsern acht Veränderlichen zu betrachten. Man nehme jetzt $a, b, c, \ldots, h$ als constant an und drücke auf Grund der sieben Hilfsgleichungen

$$dx = Xdu, \quad dy = Ydu, \quad dz = Zdu, \quad dt = \mathfrak{T}du,$$

[109] $$dp = \mathfrak{P}du, \quad dq = \mathfrak{Q}du, \quad dr = \mathfrak{R}du$$

die Veränderlichen x, y, z, t, p, q, r durch u und durch sieben willkürliche Constanten $a, b, c, \ldots, h$ aus, die durch die Integration hineinkommen (§ 11). Dann werden eben diese Ausdrücke so beschaffen sein, dass, wenn man sie und ihre vollständigen Differentiale, bei deren Bildung auch die Grössen $a, b, c, \ldots, h$ als Veränderliche betrachtet werden, in die vorgelegte Gleichung einsetzt, diese in eine Gleichung zwischen den sieben Veränderlichen $a, b, c, \ldots, h$ transformirt wird. Nun erledigt sich aber nach dem oben Bewiesenen die Integration dieser Gleichung durch vier Gleichungen von folgender Form:

$$1)\quad F(a, b, \ldots, h) = \psi[f(a, b, \ldots, h),\; f_1(a, b, \ldots, h),\; h]$$

$$2)\quad F_1(a, b, \ldots, h) = \psi'_f$$

3) $F_2(a, b, \ldots, h) = \psi'_{f_1}$
4) $F_3(a, b, \ldots, h) = \psi'_h$.

Werden dann $a, b, \ldots, h$ durch die acht Veränderlichen $x, y, \ldots, u$ ausgedrückt, so gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

1) $F(x, y, z, t, u, p, q, r) = \psi[f(x, \ldots, r), f_1(x, \ldots, r), f_2(x, \ldots, r)]$
2) $F_1(x, \ldots, r) = \psi'_f$
3) $F_2(x, \ldots, r) = \psi'_{f_1}$
4) $F_3(x, \ldots, r) = \psi'_{f_2}$,

und in diesem Gleichungssystem liegt die vollständige Integration der vorgelegten Gleichung in acht Veränderlichen.

§ 12.

Problem IX.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung in neun Veränderlichen durch ein System von fünf Gleichungen zu integriren.

Lösung.

Es sei in den neun Veränderlichen $u, x, y, z, t, p, q, r, s$ folgende Gleichung vorgelegt:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt + Tdp + Udq + Wdr + \mathfrak{X}ds.$$

Betrachtet man eine von diesen Grössen, z. B. s, als constant, [**110**] so geht die Gleichung über in eine Gleichung zwischen acht Veränderlichen, und diese ist nach dem vorigen Paragraphen durch ein System von vier Gleichungen integrirbar. Diese Gleichungen werden auf Grund der oben in § 5 und 6 angewandten und auseinandergesetzten Ueberlegungen folgende Form annehmen:

1) $F(x, y, z, t, p, q, r, u, s) = \psi[f(x, \ldots, s), f_1(x, \ldots, s), f_2(x, \ldots, s), s]$
2) $F_1(x, \ldots, s) = \psi'_f$
3) $F_2(x, \ldots, s) = \psi'_{f_1}$
4) $F_3(x, \ldots, s) = \psi'_{f_2}$.

Man nehme nunmehr das vollständige Differential der Gleichung 1), indem man auch s als Veränderliche betrachtet, und vergleiche dieses Differential, nachdem man für ψ'_f, ψ'_{f_1}, ψ'_{f_2} ihre aus den Gleichungen 2), 3), 4) bekannten Werthe eingesetzt hat, mit der vorgelegten Differentialgleichung, mit welcher es identisch sein muss. Beachtet man dies alles, so wird zu den vier vorigen Gleichungen eine fünfte von folgender Form hinzutreten:

$$5) \qquad F_4(x, \ldots, s) = \psi_s'.$$

Durch die Combination dieser fünf Gleichungen erledigt sich die Integration der vorgelegten Gleichung.

§ 13.

Problem X.

Eine partielle Differentialgleichung in sechs Veränderlichen vollständig zu integriren.

Lösung.

Es sei $du = p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,dt + w\,dv$ und eine Relation zwischen den Ableitungen p, q, r, s, w und den Veränderlichen u, x, y, z, t, v gegeben, aus welcher eine Relation zwischen diesen Veränderlichen selbst zu bestimmen ist. Zu diesem Zweck ist nur erforderlich, die vorgelegte Gleichung, betrachtet als eine gewöhnliche Differentialgleichung in zehn Veränderlichen, in eine Gleichung zwischen neun Veränderlichen zu transformiren, deren vollständige Integration durch fünf Gleichungen ja im vorigen Paragraphen gefunden worden ist. Um diese Transformation zu erreichen, wollen wir neun neue Grössen a, b, c, ..., h, i, k in die Rechnung einführen und in der bisher beobachteten Weise setzen:

$$[111] \qquad \begin{aligned} dx &= X dv + \chi da + \cdots + \chi^{\mathrm{VIII}} dk \\ dy &= Y dv + \eta da + \cdots \\ dz &= Z dv + \zeta da + \cdots \\ dt &= \mathfrak{T} dv + \tau da + \cdots \\ du &= \mathfrak{U} dv + \mathfrak{u} da + \cdots \\ dp &= \mathfrak{P} dv + \pi da + \cdots \\ dq &= \mathfrak{Q} dv + \mathfrak{q} da + \cdots \\ dr &= \mathfrak{R} dv + \mathfrak{r} da + \cdots \\ ds &= \mathfrak{S} dv + \mathfrak{s} da + \cdots \end{aligned}$$

Es sei ferner, wenn wir w als eine gegebene Function der Veränderlichen und der übrigen Ableitungen betrachten,

$$dw = \begin{cases} w' dx + w'' dy + w''' dz + w^{\mathrm{IV}} dt + w^{\mathrm{V}} dv + w^{\mathrm{VI}} du \\ + w^{\mathrm{VII}} dp + w^{\mathrm{VIII}} dq + w^{\mathrm{IX}} dr + w^{\mathrm{X}} ds. \end{cases}$$

Dann geht die Gleichung $du = pdx + qdy + rdz + sdt + wdv$ in folgende über:

$$\begin{aligned} 0 = &(pX + qY + rZ + s\mathfrak{T} + w - \mathfrak{U})\, dv \\ &+ (p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - \mathfrak{u})\, da \\ &+ (p\chi' + q\eta' + r\zeta' + s\tau' - \mathfrak{u}')\, db \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Sollen aus dieser Gleichung dv und v herausfallen, so ist zu setzen

$$1)\quad pX + qY + rZ + s\mathfrak{T} + w = \mathfrak{U}.$$

Ferner muss sein

$$\frac{\frac{\partial}{\partial v}(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - \mathfrak{u})}{p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - \mathfrak{u}} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(p\chi' + q\eta' + r\zeta' + s\tau' - \mathfrak{u}')}{p\chi' + q\eta' + r\zeta' + s\tau' - \mathfrak{u}'}$$

$=$ u. s. f.

Es ist aber $\frac{\partial}{\partial v}(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - \mathfrak{u})$ gleich

$$p\frac{\partial \chi}{\partial v} + q\frac{\partial \eta}{\partial v} + r\frac{\partial \zeta}{\partial v} + s\frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial v} + \chi\frac{\partial p}{\partial v} + \eta\frac{\partial q}{\partial v} + \zeta\frac{\partial r}{\partial v} + \tau\frac{\partial s}{\partial v}$$

$$= p\frac{\partial X}{\partial a} + q\frac{\partial Y}{\partial a} + r\frac{\partial Z}{\partial a} + s\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial a} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial a} + \chi\frac{\partial p}{\partial v} + \eta\frac{\partial q}{\partial v} + \zeta\frac{\partial r}{\partial v} + \tau\frac{\partial s}{\partial v}$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial a}(pX + qY + rZ + s\mathfrak{T} - \mathfrak{U}) \\ - X\frac{\partial p}{\partial a} - Y\frac{\partial q}{\partial a} - Z\frac{\partial r}{\partial a} - \mathfrak{T}\frac{\partial s}{\partial a} + \chi\frac{\partial p}{\partial v} + \eta\frac{\partial q}{\partial v} + \zeta\frac{\partial r}{\partial v} + \tau\frac{\partial s}{\partial v} \end{cases}$$

$$= -\frac{\partial w}{\partial a} - X\frac{\partial p}{\partial a} - Y\frac{\partial q}{\partial a} - Z\frac{\partial r}{\partial a} - \mathfrak{T}\frac{\partial s}{\partial a} + \chi\frac{\partial p}{\partial v} + \eta\frac{\partial q}{\partial v} + \zeta\frac{\partial r}{\partial v} + \tau\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Ferner ist $\frac{\partial p}{\partial a} = \pi$, $\frac{\partial q}{\partial a} = \mathfrak{q}$, $\frac{\partial r}{\partial a} = \mathfrak{r}$, $\frac{\partial s}{\partial a} = \mathfrak{s}$;

$$\frac{\partial w}{\partial a} = \left\{ \begin{array}{l} w' \frac{\partial x}{\partial a} + w'' \frac{\partial y}{\partial a} + w''' \frac{\partial z}{\partial a} + w^{IV} \frac{\partial t}{\partial a} + w^{VI} \frac{\partial u}{\partial a} + w^{VII} \frac{\partial p}{\partial a} \\ + w^{VIII} \frac{\partial q}{\partial a} + w^{IX} \frac{\partial r}{\partial a} + w^{X} \frac{\partial s}{\partial a} . \end{array} \right.$$

$$[112] \quad = w'\chi + w''\eta + w'''\zeta + w^{IV}\tau + w^{VI}\mathfrak{u} + w^{VII}\pi + w^{VIII}\mathfrak{q} + w^{IX}\mathfrak{r} + w^{X}\mathfrak{s},$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \mathfrak{P}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = \mathfrak{Q}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \mathfrak{R}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \mathfrak{S}.$$

Mithin wird $\frac{\partial}{\partial v}(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - \mathfrak{u})$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (-w' + \mathfrak{P})\chi + (-w'' + \mathfrak{Q})\eta + (-w''' + \mathfrak{R})\zeta \\ \qquad + (-w^{IV} + \mathfrak{S})\tau \\ - w^{VI}\mathfrak{u} - (w^{VII} + X)\pi - (w^{VIII} + Y)\mathfrak{q} - (w^{IX} + Z)\mathfrak{r} \\ - (w^{X} + \mathfrak{T})\mathfrak{s} . \end{array} \right.$$

Setzt man dies gleich $M(p\chi + q\eta + r\zeta + s\tau - \mathfrak{u})$, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} 2) & X + w^{VII} = 0 \\ 3) & Y + w^{VIII} = 0 \\ 4) & Z + w^{IX} = 0 \\ 5) & \mathfrak{T} + w^{X} = 0 \\ 6) & \mathfrak{P} - w' = p w^{VI} \\ 7) & \mathfrak{Q} - w'' = q w^{VI} \\ 8) & \mathfrak{R} - w''' = r w^{VI} \\ 9) & \mathfrak{S} - w^{IV} = s w^{VI}. \end{array}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit der ersten 1), so ergeben sich folgende Werthe für die neun Grössen X, Y, Z, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{U}$

1) $X = -w^{VII}$

2) $Y = -w^{VIII}$

3) $Z = -w^{IX}$

4) $\mathfrak{T} = -w^{X}$

5) $\mathfrak{P} = w' + pw^{VI}$

6) $\mathfrak{Q} = w'' + qw^{VI}$

7) $\mathfrak{R} = w''' + rw^{VI}$

8) $\mathfrak{S} = w^{IV} + sw^{VI}$

9) $\mathfrak{U} = w - pw^{VII} - qw^{VIII} - rw^{IX} - sw^{X}$.

Nunmehr sind aus den Hilfsgleichungen

[113]
$$\begin{aligned} dx &= X dv \\ dy &= Y dv \\ dz &= Z dv \\ dt &= \mathfrak{T} dv \\ du &= \mathfrak{U} dv \\ dp &= \mathfrak{P} dv \\ dq &= \mathfrak{Q} dv \\ dr &= \mathfrak{R} dv \\ ds &= \mathfrak{S} dv \end{aligned}$$

die Werthe von x, y, z, t, u, p, q, r, s herzuleiten, ausgedrückt durch v und durch neun willkürliche Constanten. Differentiirt man diese Ausdrücke dann vollständig, indem man auch die Constanten als Veränderliche betrachtet, so wird sich nach Einsetzung der Grössen und ihrer Differentiale die vorgelegte Gleichung in eine Gleichung zwischen den neun Veränderlichen $a, b, c, \ldots, k$ verwandeln. Das vollständige Integral dieser Gleichung ist aber aus dem Problem IX herzuleiten. Drückt man darauf die Grössen $a, b, c, \ldots, k$ durch die Veränderlichen x, y, z, t, u, p, q, r, s, v aus, so wird die Integration durch fünf Gleichungen von folgender Form dargestellt:

1) $F(x, y, z, t, u, v, p, q, r, s)$
$= \psi[f(x, \ldots, s), f_1(x, \ldots, s), f_2(x, \ldots, s), f_3(x, \ldots, s)]$

2) $F_1(x, \ldots, s) = \psi'_f$

3) $F_2(x, \ldots, s) = \psi'_{f_1}$

4) $F_3(x, \ldots, s) = \psi'_{f_2}$

5) $F_4(x, \ldots, s) = \psi'_{f_3}$,

aus denen sich, wenn man sich die Ableitungen p, q, r, s eliminirt denkt, die gesuchte Gleichung zwischen den Veränderlichen x, y, z, t, u, v selbst ergiebt.

§ 14.

Problem XI.

Eine Differentialgleichung in zehn Veränderlichen durch ein System von fünf Gleichungen zu integriren.

Lösung.

Es sei in den zehn Veränderlichen $u, x, y, z, t, p, q, r, v, w$ folgende Gleichung vorgelegt:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz + Sdt + Tdp + Udq + Wdr + \mathfrak{X}dv + \mathfrak{Y}dw.$$

Um sie durch ein System von fünf Gleichungen zu integriren, ist erforderlich, dass sie in eine Gleichung zwischen neun Veränderlichen transformirt wird, da diese, wie aus § 12 bekannt ist, durch ein solches System integrirt werden kann. Diese Transformation wird nach derselben Methode ausgeführt, die wir bisher benutzt haben. Setzen wir also

$$[114] \quad \begin{aligned} dx &= Xdu + \chi da + \cdots + \chi^{\text{VIII}} dk \\ dy &= Ydu + \eta da + \cdots\cdots \\ dz &= Zdu + \zeta da + \cdots\cdots \\ dt &= \mathfrak{T}du + \tau da + \cdots\cdots \\ dp &= \mathfrak{P}du + \pi da + \cdots\cdots \\ dq &= \mathfrak{Q}du + \mathfrak{q} da + \cdots\cdots \\ dr &= \mathfrak{R}du + \mathfrak{r} da + \cdots\cdots \\ dv &= \mathfrak{V}du + \mathfrak{v} da + \cdots\cdots \\ dw &= \mathfrak{W}du + \mathfrak{w} da + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Werden diese Werthe in die vorgelegte Gleichung eingesetzt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen u und den neun in die Rechnung eingeführten Grössen $a, b, \ldots, k$. Diese Gleichung ist nun von u und du zu befreien. Zu diesem Zwecke bilde man in der bisher befolgten Weise die neun Bedingungsgleichungen, aus denen sich die Grössen $X, Y, Z, \ldots, \mathfrak{W}$ als Functionen der Grössen $x, y, \ldots, w, u$ bestimmen

lassen. Ist diese Bestimmung gefunden, so bilde man die folgenden Hilfsgleichungen

$$dx = X du$$
$$dy = Y du$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$dw = \mathfrak{W} du$$

und drücke ihnen gemäss $x, y, \ldots, w$ durch u und neun willkürliche Constanten $a, b, c, \ldots, k$ aus. Wenn man dann diese Ausdrücke vollständig differentiirt und dabei auch die Constanten variirt, so wird durch Substitution die vorgelegte Gleichung in eine Differentialgleichung in den neun Grössen $a, b, \ldots, k$ transformirt werden. Integrirt man dieselbe auf Grund des Problems IX, § 12, und setzt dann an Stelle der Grössen $a, b, \ldots, k$ ihre Ausdrücke durch die zehn Veränderlichen $x, y, \ldots, w, u$ selbst ein, so wird sich die Integration der vorgelegten Gleichung durch fünf Gleichungen von folgender Form erledigen:

1) $F(x, y, z, t, p, q, r, v, w, u)$
$$= \psi[f(x, \ldots, u), f_1(x, \ldots, u), f_2(x, \ldots, u), f_3(x, \ldots, u)]$$

2) $F_1(x, \ldots, u) = \psi'_f$

3) $F_2(x, \ldots, u) = \psi'_{f_1}$

4) $F_3(x, \ldots, u) = \psi'_{f_2}$

5) $F_4(x, \ldots, u) = \psi'_{f_3}$,

[115] wo nach § 3 die Zeichen $F, F_1, \ldots, F_4, f, f_1, \ldots, f_3$ bekannte Functionen bedeuten, das Zeichen ψ eine willkürliche Function und wo der Sinn des Zeichens ψ' in jeder der Gleichungen 2)—5) nach den dort gemachten Angaben zu verstehen ist.

§ 15.

Aus den bisher auseinandergesetzten Fällen ist der weitere Fortschritt zu beliebig vielen Veränderlichen vollkommen klar, und es folgt daraus die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen Veränderlichen. Ebenso ist einleuchtend, dass nach derselben Methode die gewöhnlichen Differentialgleichungen wiederum von der ersten Ordnung in $2m$ und in $2m - 1$ Veränderlichen durch ein System von m Gleichungen integrirbar sind.

Da aber diese Lösung die Transformation einer Differentialgleichung in $2m$ Veränderlichen in eine Gleichung in $2m - 1$ Veränderlichen verlangt, so bleibt noch zu zeigen, nach welchem Gesetz diese Transformation allgemein zu bewerkstelligen ist. Hierbei scheinen zwei Probleme zu unterscheiden zu sein, ein specielles und ein allgemeines. Das eine Mal ist eine partielle Differentialgleichung in m Veränderlichen, betrachtet als eine gewöhnliche Differentialgleichung in $2m - 2$ Veränderlichen, auf eine Gleichung in $2m - 3$ Veränderlichen zurückzuführen. Das andere Mal ist allgemein eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung in $2m$ Veränderlichen in eine Gleichung in $2m - 1$ Veränderlichen zu transformiren. Es ist zweckmässig, die erste Reduction für sich auseinanderzusetzen, da sie sich mit Hilfe einer ziemlich kurzen Rechnung in ganz einfachen Formeln durchführen lässt. Dagegen erfordert die allgemeinere Transformation complicirtere Rechnungen, deren mehr verborgenes Gesetz aufzuklären der Mühe werth zu sein scheint.

Das eben Gesagte wird in den beiden folgenden Problemen erledigt.

§ 16.

Problem VII.

Eine partielle Differentialgleichung in $n + 1$ Veränderlichen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in $2n - 1$ Veränderlichen zu reduciren.

Lösung.

n Veränderliche bezeichne man mit den Buchstaben $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ und die $(n+1)$-te, die als Function von diesen betrachtet wird, mit dem Buchstaben z. Es seien ferner die nach jenen Veränderlichen genommenen Ableitungen von z gleich $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Dann wird sein

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 + \cdots + p_n dx_n.$$

[116] Da nun eine Relation zwischen den Ableitungen und den Veränderlichen selbst vorliegt, so kann man p_n als eine gegebene Function von

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, z \text{ und } p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$$

annehmen. Es sei also

$$p_n = \varphi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}).$$

Nach *Lagrange*'s Bezeichnungsweise wird dann sein

$$dp_n = \varphi'_{x_1} dx_1 + \varphi'_{x_2} dx_2 + \cdots + \varphi'_{x_n} dx_n + \varphi'_z dz + \varphi'_{p_1} dp_1 + \cdots + \varphi'_{p_{n-1}} dp_{n-1},$$

wo φ'_{x_1}, φ'_{x_2}, ... wieder gegebene Functionen sind.

Setzen wir nun in der bisher befolgten Weise

$$\begin{aligned}
dx_1 &= X_1 dx_n + A_1 da + B_1 db + C_1 dc + \cdots + M_1 dm \\
dx_2 &= X_2 dx_n + A_2 da + B_2 db + C_2 dc + \cdots \\
dx_3 &= X_3 dx_n + A_3 da + B_3 db + C_3 dc + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
dx_{n-1} &= X_{n-1} dx_n + A_{n-1} da + B_{n-1} db + C_{n-1} dc + \cdots \\
dz &= Z dx_n + \zeta_1 da + \zeta_2 db + \zeta_3 dc + \cdots \\
dp_1 &= P_1 dx_n + \mathfrak{A}_1 da + \mathfrak{B}_1 db + \mathfrak{C}_1 dc + \cdots \\
dp_2 &= P_2 dx_n + \mathfrak{A}_2 da + \mathfrak{B}_2 db + \mathfrak{C}_2 dc + \cdots \\
dp_3 &= P_3 dx_n + \mathfrak{A}_3 da + \mathfrak{B}_3 db + \mathfrak{C}_3 dc + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
dp_{n-1} &= P_{n-1} dx_n + \mathfrak{A}_{n-1} da + \mathfrak{B}_{n-1} db + \mathfrak{C}_{n-1} dc + \cdots,
\end{aligned}$$

dann geht die vorgelegte Gleichung in die folgende über:

$$\begin{aligned}
0 = &(p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 + \cdots + p_{n-1} X_{n-1} + p_n - Z) dx_n \\
&+ (p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots\cdots + p_{n-1} A_{n-1} - \zeta_1) da \\
&+ (p_1 B_1 + p_2 B_2 + \cdots\cdots + p_{n-1} B_{n-1} - \zeta_2) db \\
&+ (p_1 C_1 + p_2 C_2 + \cdots\cdots + p_{n-1} C_{n-1} - \zeta_3) dc \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

[117] Damit nun diese Gleichung von dx_n und x_n befreit werde, muss man zunächst setzen

$$Z = p_1 X_1 + p_2 X_2 + p_3 X_3 + \cdots + p_{n-1} X_{n-1} + p_n.$$

Ferner muss der Quotient

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_n}(p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots + p_{n-1} A_{n-1} - \zeta_1)}{p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots + p_{n-1} A_{n-1} - \zeta_1}$$

ungeändert bleiben, wenn man den Buchstaben A mit B, C,

$D, \ldots$ und gleichzeitig ζ_1 mit $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \ldots$ vertauscht. Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots + p_{n-1} A_{n-1} - \zeta_1)$$

$$= p_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_n} + p_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial A_{n-1}}{\partial x_n} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_n}$$

$$+ A_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + A_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_n} + \cdots + A_{n-1} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$$

$$= p_1 \frac{\partial X_1}{\partial a} + p_2 \frac{\partial X_2}{\partial a} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial X_{n-1}}{\partial a} - \frac{\partial Z}{\partial a}$$

$$+ A_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + A_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_n} + \cdots + A_{n-1} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}(X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_{n-1} p_{n-1} - Z) \\ - X_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial a} - X_2 \dfrac{\partial p_2}{\partial a} - \cdots - X_{n-1} \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial a} \\ + A_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} + A_2 \dfrac{\partial p_2}{\partial x_n} + \cdots + A_{n-1} \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} \end{cases}$$

$$= -\frac{\partial p_n}{\partial a} - X_1 \frac{\partial p_1}{\partial a} - X_2 \frac{\partial p_2}{\partial a} - \cdots - X_{n-1} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial a}$$

$$+ A_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_n} + A_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_n} + \cdots + A_{n-1} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}.$$

Andererseits ist $\dfrac{\partial p_1}{\partial a} = \mathfrak{A}_1$, $\dfrac{\partial p_2}{\partial a} = \mathfrak{A}_2, \ldots, \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial a} = \mathfrak{A}_{n-1}$;

$$\frac{\partial p_n}{\partial a} = \begin{cases} \varphi'_{x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial a} + \varphi'_{x_2} \dfrac{\partial x_2}{\partial a} + \cdots + \varphi'_{x_{n-1}} \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial a} + \varphi'_z \dfrac{\partial z}{\partial a} \\ \qquad + \varphi'_{p_1} \dfrac{\partial p_1}{\partial a} + \varphi'_{p_2} \dfrac{\partial p_2}{\partial a} + \cdots + \varphi'_{p_{n-1}} \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial a} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varphi'_{x_1} A_1 + \varphi'_{x_2} A_2 + \cdots + \varphi'_{x_{n-1}} A_{n-1} + \varphi'_z \zeta_1 \\ \qquad + \varphi'_{p_1} \mathfrak{A}_1 + \varphi'_{p_2} \mathfrak{A}_2 + \cdots + \varphi'_{p_{n-1}} \mathfrak{A}_{n-1}; \end{cases}$$

ferner $\dfrac{\partial p_1}{\partial x_n} = P_1$, $\dfrac{\partial p_2}{\partial x_n} = P_2$, $\dfrac{\partial p_3}{\partial x_n} = P_3, \ldots, \dfrac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n} = P_{n-1}$.

Mithin wird

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots + p_{n-1} A_{n-1} - \zeta_1) =$$

$$\begin{cases} (-\varphi'_{x_1} + P_1) A_1 + (-\varphi'_{x_2} + P_2) A_2 + \cdots \\ \qquad + (-\varphi'_{x_{n-1}} + P_{n-1}) A_{n-1} - \varphi'_z \zeta_1 \\ -(\varphi'_{p_1} + X_1)\mathfrak{A}_1 - (\varphi'_{p_2} + X_2)\mathfrak{A}_2 - \cdots - (\varphi'_{p_{n-1}} + X_{n-1})\mathfrak{A}_{n-1}. \end{cases}$$

[**118**] Die Bedingung für den oben genannten Quotienten wird also erfüllt sein, wenn man setzt:

$$\begin{array}{rl} 1) & X_1 = -\varphi'_{p_1} \\ 2) & X_2 = -\varphi'_{p_2} \\ & \dots\dots\dots \\ n-1) & X_{n-1} = -\varphi'_{p_{n-1}} \\ n) & P_1 = \varphi'_{x_1} + p_1 \varphi'_z \\ n+1) & P_2 = \varphi'_{x_2} + p_2 \varphi'_z \\ n+2) & P_3 = \varphi'_{x_3} + p_3 \varphi'_z \\ & \dots\dots\dots \\ 2n-2) & P_{n-1} = \varphi'_{x_{n-1}} + p_{n-1} \varphi'_z \,. \end{array}$$

Nach einer früheren Gleichung wird dann

$$2n-1) \quad Z = p_n - p_1 \varphi'_{p_1} - p_2 \varphi'_{p_2} - \cdots - p_{n-1} \varphi'_{p_{n-1}} .$$

Die Hilfsdifferentialgleichungen sind daher die folgenden:

$$\begin{array}{rl} 1) & dx_1 = -\varphi'_{p_1} \cdot dx_n \\ 2) & dx_2 = -\varphi'_{p_2} \cdot dx_n \\ & \dots\dots\dots \\ n-1) & dx_{n-1} = -\varphi'_{p_{n-1}} \cdot dx_n \\ n) & dz = (p_n - p_1 \varphi'_{p_1} - p_2 \varphi'_{p_2} - \cdots - p_{n-1} \varphi'_{p_{n-1}}) dx_n \\ n+1) & dp_1 = (\varphi'_{x_1} + p_1 \varphi'_z) dx_n \\ n+2) & dp_2 = (\varphi'_{x_2} + p_2 \varphi'_z) dx_n \\ & \dots\dots\dots \\ 2n-1) & dp_{n-1} = (\varphi'_{x_{n-1}} + p_{n-1} \varphi'_z) dx_n \,. \end{array}$$

Dieselbe hat man zu integriren und so $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ durch x_n und $2n-1$ willkürliche Constanten $a, b, c, e, \ldots$. auszudrücken (§ 2). Wenn man dann diese Ausdrücke [119] vollständig differentiirt (wobei auch die Constanten als Veränderliche zu betrachten sind) und in die vorgelegte Gleichung einsetzt, so geht dieselbe in eine gewöhnliche Differentialgleichung in den genannten Veränderlichen $a, b, c, e, \ldots$ über.

§ 17.

Problem XIII.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in $2m$ Veränderlichen in eine ebensolche Gleichung in $2m-1$ Veränderlichen zu transformiren.

Lösung.[5])

Aus den Lösungen, die wir oben für 4, 6, 8, 10 Veränderliche angegeben haben, wissen wir, dass $2m-1$ Veränderliche der vorgelegten Differentialgleichung als Functionen der $2m$-ten und $2m-1$ neuer Grössen, die an Stelle jener einzuführen sind, ausgedrückt werden müssen. Betrachtet man diese neuen Grössen als Constanten, so ergeben sich die $2m-1$ Hilfsdifferentialgleichungen, deren vollständige Integration die gesuchten Functionen selbst liefert. Um aber diese Hilfsgleichungen zu bilden, braucht man $2m-1$ Grössen, deren Werthe sich durch ebensoviele Bedingungsgleichungen bestimmen. Diese Bestimmung erfordert, wenn sie nach der gewöhnlichen Eliminationsmethode behandelt wird, zu complicirte und mühsame Rechnungen, und selbst die allgemeinen Vorschriften, welche *Bezout* und *Cramer* betreffs der Elimination gegeben haben, scheinen im vorliegenden Falle wenig Nutzen zu bringen. Ich bin aber durch eine genauere Betrachtung der genannten Bedingungsgleichungen und der Formeln, die man durch ihre Auflösung wirklich herausbekommt, zu zwei ziemlich einfachen und dabei allgemeinen Gesetzen gelangt, deren kurze Auseinandersetzung hier genügen mag.*)

---

*) Den Beweis dieser Gesetze, die ich durch ziemlich mühsame Rechnungen bestätigt habe, lasse ich hier aus, da er zu weitschweifig ist, obwohl ich nicht zweifle, dass er sich kürzer machen lässt.

Erstes Gesetz für die Bildung der Hilfsdifferentialgleichungen.

Wir wollen mit dem ersten Falle mit vier Veränderlichen beginnen oder mit der Gleichung $du = Pdx + Qdy + Rdp$, für die wir oben in § 4 folgende Hilfsgleichungen herausbekommen haben:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{PR^{IV} - RP^{IV} + R' - P'''}{PQ''' - P'''Q + QR' - Q'R + RP'' - PR''}$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{QP^{IV} - PQ^{IV} + P'' - Q'}{PQ''' - P'''Q + QR' - Q'R + RP'' - PR''}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{RQ^{IV} - QR^{IV} + Q''' - R''}{PQ''' - P'''Q + QR' - Q'R + RP'' - PR''}.$$

[**120**] Damit das allgemeine Gesetz deutlicher hervortritt, schreibe man die vorgelegte Differentialgleichung in folgender Form: $0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede$, wobei die Buchstaben a, b, c, e mit denen, welche oben die durch die Integration der Hilfsgleichungen hineingekommenen Constanten bedeuteten, nicht zu verwechseln und daher diese Constanten mit andern Buchstaben, z. B. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ oder $a_1, b_1, c_1, \ldots$, zu bezeichnen sind. Dann werden $x, y, p, z = a, b, c, e$ sein, ferner

$$P = -\frac{A}{E}, \quad Q = -\frac{B}{E}, \quad R = -\frac{C}{E},$$

mithin $PQ''' - P'''Q = P\frac{\partial Q}{\partial p} - Q\frac{\partial P}{\partial p} = P^2 \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Q}{P}\right) = \frac{A^2}{E^2}\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{B}{A}\right)$

$= \frac{1}{E^2}\left(A\frac{\partial B}{\partial c} - B\frac{\partial A}{\partial c}\right)$. Ebenso ist $QR' - Q'R$

$= \frac{1}{E^2}\left(B\frac{\partial C}{\partial a} - C\frac{\partial B}{\partial a}\right)$, $RP'' - PR'' = \frac{1}{E^2}\left(C\frac{\partial A}{\partial b} - A\frac{\partial C}{\partial b}\right)$,

$PR^{IV} - RP^{IV} = \frac{1}{E^2}\left(A\frac{\partial C}{\partial e} - C\frac{\partial A}{\partial e}\right)$, $R' - P''' = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial p}$

$= \frac{1}{E^2}\left(-E\frac{\partial C}{\partial a} + C\frac{\partial E}{\partial a}\right) + \frac{1}{E^2}\left(E\frac{\partial A}{\partial c} - A\frac{\partial E}{\partial c}\right)$.

Mithin wird

$$\frac{db}{de} = \frac{A\frac{\partial C}{\partial e} - C\frac{\partial A}{\partial e} + C\frac{\partial E}{\partial a} - E\frac{\partial C}{\partial a} + E\frac{\partial A}{\partial c} - A\frac{\partial E}{\partial c}}{A\frac{\partial B}{\partial c} - B\frac{\partial A}{\partial c} + B\frac{\partial C}{\partial a} - C\frac{\partial B}{\partial a} + C\frac{\partial A}{\partial b} - A\frac{\partial C}{\partial b}}.$$

Aehnlich kann man $\frac{dc}{de}$ und $\frac{da}{de}$ ausdrücken. Lässt man jetzt den Term Bdb fort und bildet die Gleichung $0 = Ada + Cdc + Ede$, so drückt sich bekanntlich die Bedingung für die Integrabilität dieser Gleichung als einer Gleichung in drei Veränderlichen, wobei zwei als unabhängige angenommen werden, in folgender Formel aus: (*Euler*, Calc. Integr. Vol. III. p. 6)

$$0 = A\frac{\partial C}{\partial e} - C\frac{\partial A}{\partial e} + C\frac{\partial E}{\partial a} - E\frac{\partial C}{\partial a} + E\frac{\partial A}{\partial c} - A\frac{\partial E}{\partial c}.$$

Die rechte Seite der Formel (die wir hier nur zur Abkürzung zu Hilfe nehmen als einen bekannten, leicht zu bildenden analytischen Ausdruck) wollen wir mit dem Symbol (ACE) bezeichnen, wobei man die Reihenfolge der Buchstaben A, C, E [**121**] zu berücksichtigen hat, so dass

$$(AEC) = A\frac{\partial E}{\partial c} - E\frac{\partial A}{\partial c} + E\frac{\partial C}{\partial a} - C\frac{\partial E}{\partial a} + C\frac{\partial A}{\partial e} - A\frac{\partial C}{\partial e} = -(ACE)$$

und

$$(ECA) = E\frac{\partial C}{\partial a} - C\frac{\partial E}{\partial a} + C\frac{\partial A}{\partial e} - A\frac{\partial C}{\partial e} + A\frac{\partial E}{\partial c} - E\frac{\partial A}{\partial c} = -(ACE)$$

ist. In ähnlicher Weise ist der Nenner des Bruches, durch den sich $\frac{db}{de}$ ausdrückt, mit (ABC) zu bezeichnen. Es ergiebt sich daher $\frac{db}{de} = \frac{(ACE)}{(ABC)}$ oder $0 = \frac{db}{(ACE)} + \frac{de}{(ACB)}$. Vertauscht man in dieser Gleichung e und c, E und C (die Glieder der vorgelegten Differentialgleichung können ja beliebig umgeordnet werden), so kommt

$$0 = \frac{db}{(AEC)} + \frac{dc}{(AEB)} \text{ oder } 0 = \frac{db}{(ACE)} + \frac{dc}{(ABE)}.$$

Ferner ergiebt sich, wenn man in der früheren Gleichung e und a, E und A vertauscht,

$$0 = \frac{db}{(ECA)} + \frac{da}{(ECB)} \quad \text{oder} \quad 0 = \frac{db}{(ACE)} + \frac{da}{(BCE)}.$$

Die drei Hilfsgleichungen nehmen mithin folgende Form an:

$$1) \qquad 0 = \frac{db}{(ACE)} + \frac{dc}{(ABE)}$$

$$2) \qquad 0 = \frac{db}{(ACE)} + \frac{de}{(ACB)}$$

$$3) \qquad 0 = \frac{db}{(ACE)} + \frac{da}{(BCE)},$$

wobei man bemerken kann, dass aus dem Nenner von db die Nenner von dc, de und da entstehen, indem man B für C, E, A setzt. Dieselben Gleichungen lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$1) \qquad 0 = \frac{da}{(BCE)} + \frac{dc}{(BAE)}$$

$$2) \qquad 0 = \frac{da}{(BCE)} + \frac{de}{(BCA)}$$

$$3) \qquad 0 = \frac{da}{(BCE)} + \frac{db}{(ACE)},$$

[**122**] wo jetzt aus dem Nenner von da die Nenner von dc, de, db hervorgehen, indem man A für C, E, B setzt.

Gehen wir jetzt über zu der folgenden Gleichung in sechs Veränderlichen:

$$0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg,$$

so folgt aus dem in § 8 Bewiesenen ohne weiteres folgende Hilfsgleichung zwischen db und dg:

$$\frac{db}{dg} = \frac{(ACE)\cdot(AFG) - (ACF)(AEG) + (ACG)(AEF)}{(ABC)\cdot(AEF) - (ABE)(ACF) + (ABF)(ACE)}$$

oder

$$0 = \begin{cases} \dfrac{db}{(ACE)(AFG) - (ACF)(AEG) + (ACG)(AEF)} \\ + \dfrac{dg}{(ACE)(AFB) - (ACF)(AEB) + (ACB)(AEF)}. \end{cases}$$

Vertauscht man a und b, A und B, so kommt

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{dg}{(BCE)(BFA) - (BCF)(BEA) + (BCA)(BEF)} \end{array} \right. .$$

Vertauscht man hier wieder c und g, C und G, so kommt

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BGE)(BFC) - (BGF)(BEC) + (BGC)(BEF)} \\ + \dfrac{dc}{(BGE)(BFA) - (BGF)(BEA) + (BGA)(BEF)} \end{array} \right.$$

oder

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{dc}{(BAE)(BFG) - (BAF)(BEG) + (BAG)(BEF)} \end{array} \right. .$$

Auf ähnliche Weise findet man eine Gleichung zwischen da, de und da, df. Es ergeben sich mithin folgende vier Hilfsgleichungen:

$$1)\quad 0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{dc}{(BAE)(BFG) - (BAF)(BEG) + (BAG)(BEF)} \end{array} \right.$$

[123]

$$2)\quad 0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{de}{(BCA)(BFG) - (BCF)(BAG) + (BCG)(BAF)} \end{array} \right.$$

$$3)\quad 0 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{df}{(BCE)(BAG) - (BCA)(BEG) + (BCG)(BEA)} \end{array} \right.$$

$$4)\quad 0 = \begin{cases} \dfrac{da}{(BCE)(BFG) - (BCF)(BEG) + (BCG)(BEF)} \\ + \dfrac{dg}{(BCE)(BFA) - (BCF)(BEA) + (BCA)(BEF)}. \end{cases}$$

Hier gehen aus dem Nenner von da die Nenner von dc, de, df, dg hervor, indem man A für C, E, F, G setzt. Dieses Gesetz erleidet eine Ausnahme bei der Differentialgleichung zwischen da und db. Diese Gleichung lässt sich aber ohne weiteres aus jeder von den vier obigen ableiten, z. B. aus der ersten, wenn c und b, C und B miteinander vertauscht werden, woraus sich ergiebt

$$5)\quad 0 = \begin{cases} \dfrac{da}{(CBE)(CFG) - (CBF)(CEG) + (CBG)(CEF)} \\ + \dfrac{db}{(CAE)(CFG) - (CAF)(CEG) + (CAG)(CEF)}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann man auch die Gleichungen 2), 3), 4) aus 1) ableiten. Aber ein wesentlicher Unterschied ist darin zu erkennen, dass bei Vertauschung von c mit e, f, g; C mit E, F, G der Nenner von da nur sein Zeichen ändert, während bei Vertauschung von c und b der Nenner selbst geändert wird. Deshalb erscheint die oben angegebene Art die Gleichungen 2), 3), 4) abzuleiten als einfacher.

Schreiten wir fort zu der folgenden Gleichung in acht Veränderlichen:

$$0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg + Hdh + Idi.$$

Dann werden die Hilfsgleichungen folgende sein

$$1)\quad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dc}{\mathfrak{C}}$$

$$2)\quad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{de}{\mathfrak{E}}$$

[124] $$3)\quad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{df}{\mathfrak{F}}$$

$$4)\quad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dg}{\mathfrak{G}}$$

$$5)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dh}{\mathfrak{H}}$$

$$6)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{di}{\mathfrak{I}}$$

$$7)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}'} + \frac{db}{\mathfrak{B}'}\,.$$

Das oben ausgedrückte Gesetz wird hier auch beobachtet, dass nämlich die Nenner von dc, de, df, dg, dh, di, d. h. $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, aus dem Nenner $\mathfrak{A}$ von da entstehen, indem man A für C, E, F, G, H, I setzt. Die siebente Gleichung entsteht aber aus der ersten, indem man in derselben c und b, C und B mit einander vertauscht. Es bleibt also nur übrig, den Nenner $\mathfrak{A}$ zu bestimmen und sein Bildungsgesetz zu ermitteln. Man findet aber nach gehöriger Ausführung der Rechnungen, wenn man die gemeinsamen Factoren in den Hilfsgleichungen fortlässt und die sich gegenseitig aufhebenden Glieder beseitigt,

$$\mathfrak{A} = \begin{cases} (BCE)(BFG)(BHI) - (BCE)(BFH)(BGI) \\ + (BCE)(BFI)(BGH) - (BCF)(BEG)(BHI) \\ + (BCF)(BEH)(BGI) - (BCF)(BEI)(BGH) \\ + (BCG)(BEF)(BHI) - (BCG)(BEH)(BFI) \\ + (BCG)(BEI)(BFH) - (BCH)(BEF)(BGI) \\ + (BCH)(BEG)(BFI) - (BCH)(BEI)(BFG) \\ + (BCI)(BEF)(BGH) - (BCI)(BEG)(BFH) \\ + (BCI)(BEH)(BFG)\,. \end{cases}$$

Nimmt man den Buchstaben B fort, so umfassen die Glieder dieses Ausdrucks diejenigen Permutationen der übrigen Buchstaben C, E, F, G, H, I (mit Ausnahme von A), welche sich unter folgender Einschränkung vornehmen lassen: In jeder Complexion (z. B. C, G, E, H, F, I im achten Gliede von $\mathfrak{A}$) sind der erste, dritte, fünfte Buchstabe (z. B. C, E, F), allgemein alle an einer ungeraden Stelle befindlichen Buchstaben unter sich wohlgeordnet, und jeder an einer geraden Stelle stehende Buchstabe (G, H, I) kommt in der alphabetischen Reihenfolge später als der Buchstabe an der nächstvorhergehenden ungeraden Stelle (C, E, F). Ordnet man diese Formen richtig an, d. h. nach lexicographischer Reihenfolge

(z. B. C, G, E, H, F, I vor C, G, E, I, F, H), so wechseln die Vorzeichen der Glieder ab. Dieses beschränkende Gesetz für die Permutationen lässt sich auch so aussprechen: Theilt man die einzelnen Complexionen in Dyaden oder Klassen [**125**] von je zwei Elementen, so müssen die Dyaden sowohl hinsichtlich ihrer Elemente als auch unter einander wohl geordnet sein.

Nach demselben Gesetz wird nun allgemein für beliebig viele Buchstaben oder für Gleichungen in beliebig vielen Veränderlichen der Nenner von da gebildet, und da das Gesetz, nach welchem die übrigen Nenner aus diesem abgeleitet werden, auch noch immer gilt, so kann man in der auseinandergesetzten Weise die Hilfsgleichungen allgemein bilden. Ein ziemlich bequemer combinatorischer Process, durch den sich die oben genannten Permutationen ergeben, ist folgender: Die Buchstaben, deren Permutationen unter der oben erwähnten Einschränkung man sucht, seien $a, b, c, e, \ldots, k, l, m, n$. Nehmen wir an, die Permutationen der Buchstaben $c, e, \ldots, m, n$ unter Ausschluss von a und b seien gefunden. Dann setze man 1) vor diese einzelnen Permutationen oder Complexionen die Binion a, b, 2) bilde man aus dieser ersten Reihe eben so viele neue Complexionen, indem man b und c vertauscht, 3) aus diesen wieder andere, indem man c und d vertauscht. So fortfahrend bilde man aus jeder Reihe von Complexionen eine neue, indem man einen Buchstaben mit dem nächstfolgenden vertauscht, bis zuletzt m und n miteinander vertauscht werden. Auf diese Weise erhält man alle Permutationen der Buchstaben $a, b, c, \ldots, m, n$, welche die erwähnte Einschränkung zulässt. Es ist klar, dass, wenn man mit den Buchstaben m, n beginnt, von diesen zu k, l fortschreitet und so weiter, die gesuchten Permutationen dabei schliesslich in der involutorischen Form (nach *Hindenburg*'s Bezeichnung) gefunden werden.

Der Erwähnung würdig scheint es, dass die Anzahl der genannten Permutationen für $2n$ Elemente durch das Product der ungeraden Zahlen $1, 3, 5, \ldots, (2n-1)$ ausgedrückt wird, während nach einer allgemein bekannten Formel die Anzahl aller möglichen Permutationen gleich $1.2.3.4\ldots.2n$*)

*) Beiläufig füge ich folgenden allgemeineren combinatorischen Satz hinzu. Wenn $\alpha.n$ Elemente unter der Einschränkung permutirt werden, dass bei Zerlegung der einzelnen Complexionen in Klassen von α Elementen diese Klassen sowohl hinsichtlich ihrer Elemente als auch unter einander wohl geordnet sind, so wird die

ist. So besteht bei der Differentialgleichung in zehn Veränderlichen (§ 14)

$$0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg + Hdh + Idi + Kdk + Ldl$$

der Nenner $\mathfrak{A}$ aus $105 = 1 . 3 . 5 . 7$ Gliedern, von deren Entwickelung ich hier der Kürze wegen absehe.

[126] § 18.

Fortsetzung.

Zweites Gesetz für die Bildung der Hilfsgleichungen.

Die bisher angegebenen Formeln für die Nenner $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... bestehen aus Gliedern, die selbst Producte von nicht einfachen, sondern aus sechs Bestandtheilen zusammengesetzten Factoren sind. So ist z. B. der Factor (BCE) gleich

$$B\frac{\partial C}{\partial e} - C\frac{\partial B}{\partial e} + C\frac{\partial E}{\partial b} - E\frac{\partial C}{\partial b} + E\frac{\partial B}{\partial c} - B\frac{\partial E}{\partial c}$$
$$= BC^{\mathrm{IV}} - CB^{\mathrm{IV}} + CE'' - EC'' + EB''' - BE'''.$$

Wir unterscheiden nämlich die Ableitungen der Grössen A, B, C, ... in der oben befolgten Weise durch Indices, z. B. ist $\frac{\partial C}{\partial a} = C'$, $\frac{\partial C}{\partial b} = C''$, $\frac{\partial C}{\partial c} = C'''$, $\frac{\partial C}{\partial e} = C^{\mathrm{IV}}$, u. s. f. derart, dass, wenn man sowohl den grossen als auch den kleinen Buchstaben (C, c) der alphabetischen Reihenfolge nach numerische Indices ertheilt, ein einem grossen Buchstaben beigefügter Index den Differentialquotienten desselben bezeichnet, wobei derjenige kleine Buchstabe als Veränderliche zu betrachten ist, welchem jener Index zukommt. So ist z. B. $C^{\mathrm{IV}} = \frac{\partial C}{\partial e}$, weil der numerische Index des Buchstaben e gleich 4 ist.

Anzahl der Permutationen gleich $\frac{(n+1)(n+2)\ldots\alpha n}{(1.2.3\ldots\alpha)^n}$ sein. Für $\alpha = 2$ ist zu beachten, dass $\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} = 2^n$ ist, woraus sich für diesen Specialfall der einfachere Ausdruck durch das Product der ungeraden Zahlen ergiebt.

Wenn nun jene aus zusammengesetzten Factoren bestehenden Producte durch wirkliche Multiplication entwickelt werden, so nehmen die erwähnten Ausdrücke der Nenner andere Formen an, deren Glieder jetzt aus Producten einfacher Factoren bestehen. Bei der Differentialgleichung in vier Veränderlichen

$$0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede$$

sind die Hilfsgleichungen nach dem oben Bewiesenen folgende:

$$1)\quad 0 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{da}{BC^{IV} - CB^{IV} + CE'' - EC'' + EB''' - BE'''} \\ + & \frac{db}{AC^{IV} - CA^{IV} + CE' - EC' + EA''' - AE'''} \end{aligned} \right.$$

[127] oder, wenn man die Glieder anders ordnet,

$$0 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{da}{B(C^{IV} - E''') - C(B^{IV} - E'') + E(B''' - C'')} \\ + & \frac{db}{A(C^{IV} - E''') - C(A^{IV} - E') + E(A''' - C')} \end{aligned} \right.$$

$$2)\quad 0 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{da}{B(C^{IV} - E''') - C(B^{IV} - E'') + E(B''' - C'')} \\ + & \frac{dc}{B(A^{IV} - E') - A(B^{IV} - E'') + E(B' - A'')} \end{aligned} \right.$$

$$3)\quad 0 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{da}{B(C^{IV} - E''') - C(B^{IV} - E'') + E(B''' - C'')} \\ + & \frac{de}{B(C' - A''') - C(B' - A'') + A(B''' - C'')} \end{aligned} \right. .$$

In diesen drei Gleichungen gehen die Nenner von db, dc, de aus dem Nenner von da dadurch hervor, dass man A für B, C, E setzt und zugleich den Index von A, d. h. I, für die Indices von B, C, E, d. h. für II, III, IV. Dieses Gesetz aus dem ersten Nenner, dem von da, die übrigen abzuleiten gilt in gleicher Weise für beliebig viele Buchstaben a, b, c, e, f, g, h, u. s. w., und zwar für alle Hilfsgleichungen ohne jede Ausnahme, wie sie bei der früheren Bildungsregel (§ 17) für die Gleichung zwischen da und db zu beobachten war. Es ist daher nur zu entwickeln, wie man den Nenner von da zu bilden hat.

Bei der Gleichung in sechs Veränderlichen

$$0 = A\,da + B\,db + C\,dc + E\,de + F\,df + G\,dg$$

seien die Hilfsgleichungen

$$1)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{db}{\mathfrak{B}}$$

$$2)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dc}{\mathfrak{C}}$$

$$3)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{de}{\mathfrak{E}}$$

$$4)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{df}{\mathfrak{F}}$$

$$5)\qquad 0 = \frac{da}{\mathfrak{A}} + \frac{dg}{\mathfrak{G}}.$$

[**128**] Dann wird der Nenner $\mathfrak{A}$ sein

$$B\begin{pmatrix} C^{V}E^{VI} - C^{IV}F^{VI} + C^{IV}G^{V} - E^{V}C^{VI} + E'''F^{VI} - E'''G^{V} \\ + F^{IV}C^{VI} - F'''E^{VI} + F'''G^{IV} - G^{IV}C^{V} + G''E^{V} - G'''F^{IV} \end{pmatrix}$$

$$- C\begin{pmatrix} B^{V}E^{VI} - B^{IV}F^{VI} + B^{IV}G^{V} - E^{V}B^{VI} + E''F^{VI} - E''G^{V} \\ + F^{IV}B^{VI} - F''E^{VI} + F''G^{IV} - G^{IV}B^{V} + G''E^{V} - G''F^{IV} \end{pmatrix}$$

$$+ E\begin{pmatrix} B^{V}C^{VI} - B'''F^{VI} + B'''G^{V} - C^{V}B^{VI} + C''F^{VI} - C''G^{V} \\ + F'''B^{VI} - F''C^{VI} + F''G''' - G'''B^{V} + G''C^{V} - G''F''' \end{pmatrix}$$

$$- F\begin{pmatrix} B^{IV}C^{VI} - B'''E^{VI} + B'''G^{IV} - C^{IV}B^{VI} + C''E^{VI} - C''G^{IV} \\ + E'''B^{VI} - E''C^{VI} + E''G''' - G'''B^{IV} + G''C^{IV} - G''E''' \end{pmatrix}$$

$$+ G\begin{pmatrix} B^{IV}C^{V} - B'''E^{V} + B'''F^{IV} - C^{IV}B^{V} + C''E^{V} - C''F^{IV} \\ + E'''B^{V} - E''C^{V} + E''F''' - F'''B^{IV} + F''C^{IV} - F''E''' \end{pmatrix}.$$

Diese Ausdrücke umfassen, wenn wir nur auf die Buchstaben B, C, E, F, G achten, alle Ternen derselben mit Permutationen oder die dritte Classe der in der Combinationslehre sogenannten Variationen, und zwar wohlgeordnet. Wie die Vorzeichen sich verhalten, ist klar: Sie alterniren in doppeltem Sinne, einmal nach den Factoren B, C, E, F, G und dann nach den einzelnen Gliedern, die diese Factoren enthalten. Was die numerischen Indices der Buchstaben anbetrifft, so sind in jeder Complexion oder in jedem Producte diejenigen Indices in der natürlichen Reihenfolge vereinigt, welche den in diesem Producte fehlenden

Buchstaben (immer mit Ausschluss von A) zukommen. Der erste Buchstabe jedes Productes hat keinen Index. Z. B. werden in den Producten BEG, BGE, EBG, EGB, GBE, GEB dem zweiten und dem dritten Factor die Indices der Buchstaben C, F beigefügt, die in diesen Producten nicht vorkommen, d. h. die Zahlen III, V. Ebenso umfasst bei der Differentialgleichung in acht Veränderlichen

$$0 = Ada + Bdb + Cdc + Ede + Fdf + Gdg + Hdh + Idi$$

der Nenner $\mathfrak{A}$ alle Quaternen der sieben Buchstaben B, C, E, F, G, H, I mit Permutationen. Bei der Gleichung in 10 Veränderlichen

$$0 = Ada + Bdb + \cdots + Kdk + Ldl$$

enthält der Nenner alle Quinen der neun Buchstaben B, C, ..., K, L mit Permutationen. Allgemein besteht bei einer Differentialgleichung in $2n$ Veränderlichen der Nenner von da oder $\mathfrak{A}$ aus allen Variationen der $2n - 1$ Buchstaben B, C, E, ... (mit Ausschluss von A) zur n-ten Classe. Die Vorzeichen der Glieder (vorausgesetzt, dass die Classe wohlgeordnet ist, d. h. dass die einzelnen Complexionen in lexicographischer Ordnung aufeinander folgen) [**129**] und die mit den Buchstaben zu verbindenden numerischen Indices befolgen das oben angegebene Gesetz. Ebenso ist aus dem vorhin Gesagten klar, wie sich aus dem ersten Nenner $\mathfrak{A}$ die übrigen ableiten lassen. Den Uebergang von der ersten Bildungsregel (§ 17) zu unserer zweiten und die Bedeutung dieser wird folgendes Beispiel zeigen. Bei der Differentialgleichung in acht Veränderlichen besteht der Nenner von da nach der zweiten Regel aus $7 . 6 . 5 . 4 = 840$ Gliedern. So gross ist die Anzahl der Quaternen aus sieben Elementen mit Permutationen. Nach der ersten Regel besteht der Nenner von da nur aus 15 Gliedern. Wenn man aber die Producte von drei Factoren, deren jeder aus sechs Theilen besteht, entwickelt, so liefert jedes Product $6 . 6 . 6 = 216$ Bestandtheile. Mithin steigt die Gliederzahl des Nenners nach dieser Entwickelung auf $15 . 216 = 3240$. Diese Glieder ziehen sich jetzt auf Grund der zweiten Regel sicher auf 840 zusammen, indem die übrigen 2400 sich gegenseitig aufheben. Das lässt sich durch wirkliche Ausführung der Rechnung bestätigen.

§ 19.

Obwohl die bisher auseinandergesetzte Methode eine Differentialgleichung erster Ordnung in $2n$ Veränderlichen auf eine ebensolche Gleichung in $2n-1$ Veränderlichen zu reduciren in derselben Weise auf jede Zahl von Veränderlichen, auch auf eine ungerade, ausdehnbar zu sein scheint, zeigt doch eine genauere Betrachtung das Gegentheil. Sie lehrt nämlich, dass eine Gleichung in $2n+1$ Veränderlichen im allgemeinen nicht auf $2n$ Veränderliche reducirt werden kann, sondern dass erst dann diese Reduction möglich ist, wenn eine gewisse Relation zwischen den Coefficienten der Differentialgleichung besteht. Es mag genügen, dieses bemerkenswerthe Phänomen durch zwei Beispiele zu erläutern.

Folgende Gleichung in drei Veränderlichen sei vorgelegt: $dz = Pdx + Qdy$, wo P, Q gegebene Functionen von x, y, z sind. Wenn wir nun versuchen wollten, nach der bisher angewandten Methode diese Gleichung auf eine Gleichung in zwei Veränderlichen zu reduciren, so ist zu setzen

$$dx = Xdz + \chi da + \chi' db$$
$$dy = Ydz + \eta da + \eta' db\,.$$

Dann geht die vorgelegte Gleichung in folgende über

$$0 = (PX + QY - 1)dz + (P\chi + Q\eta)da + (P\chi' + Q\eta')db.$$

Soll dieselbe von dz und z befreit werden, so muss man setzen [130]

1) $PX + QY = 1$

2) $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{P\chi' + Q\eta'}{P\chi + Q\eta}\right) = 0$ oder $\dfrac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta)}{P\chi + Q\eta} = \dfrac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi' + Q\eta')}{P\chi' + Q\eta'}$.

Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta) = \left\{\begin{array}{l} P\dfrac{\partial \chi}{\partial z} + Q\dfrac{\partial \eta}{\partial z} \\ + \chi\dfrac{\partial P}{\partial z} + \eta\dfrac{\partial Q}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} P\dfrac{\partial X}{\partial a} + Q\dfrac{\partial Y}{\partial a} \\ + \chi\dfrac{\partial P}{\partial z} + \eta\dfrac{\partial Q}{\partial z} \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial a}(PX + QY) - X\dfrac{\partial P}{\partial a} - Y\dfrac{\partial Q}{\partial a} \\ + \chi\dfrac{\partial P}{\partial z} + \eta\dfrac{\partial Q}{\partial z} \end{array}\right.$$

$$= -X\frac{\partial P}{\partial a} - Y\frac{\partial Q}{\partial a} + \chi\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\frac{\partial Q}{\partial z}\,.$$

Da P und Q Functionen von x, y und z sind, so sei

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dz$$
$$dQ = Q'dx + Q''dy + Q'''dz.$$

Dann wird sein $\frac{\partial P}{\partial a} = P'\frac{\partial x}{\partial a} + P''\frac{\partial y}{\partial a} = P'\chi + P''\eta$,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = P'\frac{\partial x}{\partial z} + P''\frac{\partial y}{\partial z} + P''' = P'X + P''Y + P'''.$$

Aehnlich drücken sich, wenn man P mit Q vertauscht, $\frac{\partial Q}{\partial a}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$ aus. Es ergiebt sich daher

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi + Q\eta)}{P\chi + Q\eta} = \frac{(P'X + P''Y + P''' - XP' - YQ')\chi + (Q'X + Q''Y + Q''' - XP'' - YQ'')\eta}{P\chi + Q\eta}$$
$$= \frac{[(P'' - Q')Y + P''']\chi + [(Q' - P'')X + Q''']\eta}{P\chi + Q\eta}.$$

In derselben Weise drückt sich, wenn man χ, η mit χ', η' vertauscht, der Quotient $\frac{\frac{\partial}{\partial z}(P\chi' + Q\eta')}{P\chi' + Q\eta'}$ aus. Er wird dem ersten gleich sein, wenn man setzt $\frac{(Q' - P'')X + Q'''}{Q} = \frac{(P'' - Q')Y + P'''}{P}$ oder

$$(Q' - P'')PX - (P'' - Q')QY + PQ''' - P'''Q = 0.$$

Diese Gleichung ist zur Bestimmung der beiden Unbekannten X, Y mit der früheren 1) $PX + QY = 1$ zu verbinden. Entnimmt man aber aus dieser $PX = 1 - QY$ und setzt es in die andere Gleichung ein, so fällt aus ihr auch Y heraus. Es wird nämlich

[131] $Q' - P'' - Q(Q' - P'')Y - (P'' - Q')QY + PQ''' - P'''Q = 0$,

d. h. $$Q' - P'' + PQ''' - P'''Q = 0.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung, d. h. die Relation, welche zwischen den Coefficienten P, Q der vorgelegten Gleichung bestehen muss, damit dieselbe auf eine Gleichung in zwei Veränderlichen reducirbar sei.

Diese Bedingungsgleichung lautet, wenn man die üblichen Symbole benutzt,

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Sie stimmt genau überein mit dem bekannten Kriterium für die Integrabilität der Gleichung $dz = Pdx + Qdy$, betrachtet als Gleichung in den drei Veränderlichen z, x, y, von denen eine eine Function der beiden andern sein soll, die miteinander durch keine analytische Beziehung verbunden sind (§ 17). Dass aber eine Differentialgleichung in drei Veränderlichen, die in diesem Sinne integrabel ist, d. h. jenem Kriterium genügt, auf eine Gleichung in zwei Veränderlichen reducirt werden kann, lässt sich mit andern Hilfsmitteln beweisen.

In ähnlicher Weise werde die Differentialgleichung in fünf Veränderlichen

$$dv = Pdx + Qdy + Rdz + Sdu,$$

wo P, Q, R, S gegebene Functionen von x, y, z, u, v sind, behandelt. Um diese Gleichung in eine Gleichung in vier Veränderlichen a, b, c, e zu transformiren, wollen wir setzen:

$$\begin{aligned}
dx &= Xdu + \chi da + \chi' db + \chi'' dc + \chi''' de, \\
dy &= Ydu + \eta da + \eta' db + \eta'' dc + \eta''' de, \\
dz &= Zdu + \zeta da + \zeta' db + \zeta'' dc + \zeta''' de, \\
dv &= Vdu + \mathfrak{v} da + \mathfrak{v}' db + \mathfrak{v}'' dc + \mathfrak{v}''' de.
\end{aligned}$$

Dann geht die vorgelegte Gleichung in folgende über:

$$\begin{aligned}
0 = {} & (V - PX - QY - RZ - S)\,du \\
& + (\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta)da + (\mathfrak{v}' - P\chi' - Q\eta' - R\zeta')db \\
& + (\mathfrak{v}'' - P\chi'' - Q\eta'' - R\zeta'')dc + (\mathfrak{v}''' - P\chi''' - Q\eta''' - R\zeta''')de.
\end{aligned}$$

Soll diese Gleichung von du und u befreit werden, so muss man setzen

$$1) \qquad V = PX + QY + RZ + S.$$

[132] Ferner muss der Quotient $\dfrac{\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta)}{\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta}$ derselbe bleiben, wenn man für $\mathfrak{v}$, χ, η, ζ

$$\mathfrak{v}',\ \chi',\ \eta',\ \zeta';\quad \mathfrak{v}'',\ \chi'',\ \eta'',\ \zeta'';\quad \mathfrak{v}''',\ \chi''',\ \eta''',\ \zeta'''$$

setzt. Es ist aber $\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta) =$

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial u} - P\frac{\partial \chi}{\partial u} - Q\frac{\partial \eta}{\partial u} - R\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \chi\frac{\partial P}{\partial u} - \eta\frac{\partial Q}{\partial u} - \zeta\frac{\partial R}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial a} - P\frac{\partial X}{\partial a} - Q\frac{\partial Y}{\partial a} - R\frac{\partial Z}{\partial a} - \chi\frac{\partial P}{\partial u} - \eta\frac{\partial Q}{\partial u} - \zeta\frac{\partial R}{\partial u}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a}(V - PX - QY - RZ) + X\frac{\partial P}{\partial a} + Y\frac{\partial Q}{\partial a} + Z\frac{\partial R}{\partial a} \\ -\chi\frac{\partial P}{\partial u} - \eta\frac{\partial Q}{\partial u} - \zeta\frac{\partial R}{\partial u} \end{array}\right.$$

$$= \frac{\partial S}{\partial a} + X\frac{\partial P}{\partial a} + Y\frac{\partial Q}{\partial a} + Z\frac{\partial R}{\partial a} - \chi\frac{\partial P}{\partial u} - \eta\frac{\partial Q}{\partial u} - \zeta\frac{\partial R}{\partial u}.$$

Da P, Q, R, S gegebene Functionen von x, y, z, u, v sind, so wollen wir setzen

$$dP = P'dx + P''dy + P'''dz + P^{\mathrm{IV}}du + P^{\mathrm{V}}dv$$

und in ähnlicher Weise dQ, dR, dS ausdrücken.

Dann wird sein

$$\frac{\partial P}{\partial a} = P'\chi + P''\eta + P'''\zeta + P^{\mathrm{V}}\mathfrak{v}$$

$$\frac{\partial P}{\partial u} = P'X + P''Y + P'''Z + P^{\mathrm{IV}} + P^{\mathrm{V}}V,$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man für die übrigen Ableitungen nach a und nach u. Setzt man dieselben ein, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}&(\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta) \\ &= (S' + YQ' + ZR' - P''Y - P'''Z - P^{\mathrm{V}}V - P^{\mathrm{IV}})\chi \\ &+ (S'' + XP'' + ZR'' - Q'X - Q'''Z - Q^{\mathrm{V}}V - Q^{\mathrm{IV}})\eta \\ &+ (S''' + XP''' + YQ''' - R'X - R''Y - R^{\mathrm{V}}V - R^{\mathrm{IV}})\zeta \\ &+ (S^{\mathrm{V}} + XP^{\mathrm{V}} + YQ^{\mathrm{V}} + ZR^{\mathrm{V}})\mathfrak{v}. \end{aligned}$$

Mithin wird die auf den Quotienten $\dfrac{\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta)}{\mathfrak{v} - P\chi - Q\eta - R\zeta}$ bezügliche Bedingung erfüllt sein, wenn wir folgende drei Gleichungen annehmen:

$$2)\begin{cases} -P(S^{V}+P^{V}X+Q^{V}Y+R^{V}Z) \\ =S'+YQ'+ZR'-P''Y-P'''Z-P^{IV}-P^{V}V \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} -Q(S^{V}+P^{V}X+Q^{V}Y+R^{V}Z) \\ =S''+XP''+ZR''-Q'X-Q'''Z-Q^{IV}-Q^{V}V \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} -R(S^{V}+P^{V}X+Q^{V}Y+R^{V}Z) \\ =S'''+XP'''+YQ'''-R'X-R''Y-R^{IV}-R^{V}V. \end{cases}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit der früheren 1), so scheint es, als ob dadurch die vier unbekannten Grössen [**133**] X, Y, Z, V bestimmt werden. Geht man aber wirklich an die Rechnung und setzt sie bis zum Ende fort, so führt die Elimination, da die Unbekannte aus der Rechnung herausfällt, zu folgender Bedingungsgleichung:

$$0=\begin{cases} (Q^{V}S-QS^{V}+Q^{IV}-S'')(PR^{V}-P^{V}R+R'-P''') \\ -(P^{V}S-PS^{V}+P^{IV}-S')(QR^{V}-Q^{V}R+R''-Q''') \\ -(R^{V}S-RS^{V}+R^{IV}-S''')(PQ^{V}-P^{V}Q+Q'-P''). \end{cases}$$

Es wird daher die vorgelegte Gleichung in fünf Veränderlichen erst dann auf eine Gleichung in vier Veränderlichen reducirt werden können, wenn diese Relation zwischen ihren Coefficienten stattfindet. Ebenso kann man für sieben, neun, ... Veränderliche schliessen. Das allgemeine Gesetz der Bedingungsgleichung für $2n+1$ Veränderliche, die erfüllt sein muss, wenn die Differentialgleichung auf $2n$ Veränderliche reducirbar sein soll, (ein Gesetz, das sich ähnlich wie bei den oben in §§ 17, 18 auseinandergesetzten Formeln ausdrücken lässt) und die übrigen Folgerungen, die sich aus dieser merkwürdigen Beobachtung ziehen lassen, übergehe ich hier.[6])

§ 20.

Problem XIV.

Die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichungen auf eine einfachere Form zu bringen.

Lösung.

Es sei $dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+p_3\,dx_3+\cdots+p_n\,dx_n$ (§ 16), und es werde eine Relation zwischen den Veränderlichen $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ und den Ableitungen $p_1, p_2, \ldots, p_n$

als gegeben angenommen, mit deren Hilfe sich p_n durch die übrigen Grössen ausdrücken lässt. Dann ist aus der obigen Auseinandersetzung bekannt, dass die vollständige Integration dieser partiellen Differentialgleichung sich in Gleichungen von folgender Form ausdrückt:

$$1)\quad F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) = \psi\left\{\begin{array}{l} f(z, x_1, \ldots\ldots, x_n, p_1, \ldots\ldots, p_{n-1}), \\ f_1(z, x_1, \ldots, p_{n-1}), f_2(z, \ldots, p_{n-1}), \\ \ldots\ldots, f_{n-2}(z, x_1, \ldots, p_{n-1}) \end{array}\right\}.$$

$$2)\quad F_1(z, x_1, \ldots, p_{n-1}) = \psi'_f$$

$$3)\quad F_2(z, x_1, \ldots, p_{n-1}) = \psi'_{f_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n)\quad F_{n-1}(z, x_1, \ldots, p_{n-1}) = \psi'_{f_{n-2}}.$$

[134] Setzen wir nunmehr

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, p_{n-1}) = k_1$$

$$f_1(z, x_1, \ldots\ldots, p_{n-1}) = k_2$$

$$f_2(z, x_1, \ldots\ldots, p_{n-1}) = k_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-2}(z, x_1, \ldots\ldots, p_{n-1}) = k_{n-1},$$

so können wir uns mit Hilfe dieser $n - 1$ Gleichungen die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ durch $z, x_1, \ldots, x_n$ und durch $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ ausgedrückt denken. Alsdann gehen auch die mit $F, F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ bezeichneten Functionen in bekannte Functionen eben jener Grössen $z, x_1, \ldots, x_n$, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ über, und wir wollen diese Functionen durch $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ ausdrücken. Die Integralgleichungen werden daher folgende Form erhalten:

$$1)\quad \mathfrak{F}(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) = \psi(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$$

$$2)\quad \mathfrak{F}_1(z, x_1, \ldots, k_{n-1}) = \psi'_{k_1}$$

$$3)\quad \mathfrak{F}_2(z, x_1, \ldots, k_{n-1}) = \psi'_{k_2}$$

$$4)\quad \mathfrak{F}_3(z, x_1, \ldots, k_{n-1}) = \psi'_{k_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n)\quad \mathfrak{F}_{n-1}(z, x_1, \ldots, k_{n-1}) = \psi'_{k_{n-1}}.$$

Es besteht nun zwischen den mit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ..., $\mathfrak{F}_{n-1}$ bezeichneten Functionen eine einfache und bemerkenswerthe Relation, mit deren Hilfe man aus der ersten Function die übrigen leicht bestimmen kann. Zu dieser Relation bin ich geführt worden durch eine genauere Betrachtung der Beziehung zwischen den Integralgleichungen und der vorgelegten Differentialgleichung, d. h. der Art und Weise, wie jene diese erfüllen.

Differentiirt man nämlich die Gleichung 1), so erhält man

$$dz\cdot\mathfrak{F}'_z+dx_1\cdot\mathfrak{F}'_{x_1}+dx_2\cdot\mathfrak{F}'_{x_2}+\cdots+dk_1\cdot\mathfrak{F}'_{k_1}+dk_2\cdot\mathfrak{F}'_{k_2}+\cdots+dk_{n-1}\cdot\mathfrak{F}'_{k_{n-1}}$$
$$=dk_1\cdot\psi'_{k_1}+dk_2\cdot\psi'_{k_2}+\cdots+dk_{n-1}\cdot\psi'_{k_{n-1}}.$$

Mithin wird, wenn man für ψ'_{k_1}, ψ'_{k_2}, ..., $\psi'_{k_{n-1}}$ die aus den Gleichungen 2), 3), ..., n) hervorgehenden Werthe einsetzt, die wir der Kürze wegen nur durch die Functionszeichen [135] $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, ..., $\mathfrak{F}_{n-1}$ darstellen wollen,

$$0=\begin{cases} dz\cdot\mathfrak{F}'_z+dx_1\cdot\mathfrak{F}'_{x_1}+dx_2\cdot\mathfrak{F}'_{x_2}+\cdots+dx_n\cdot\mathfrak{F}'_{x_n} \\ +dk_1(\mathfrak{F}'_{k_1}-\mathfrak{F}_1)+dk_2(\mathfrak{F}'_{k_2}-\mathfrak{F}_2)+\cdots+dk_{n-1}(\mathfrak{F}'_{k_{n-1}}-\mathfrak{F}_{n-1}).\end{cases}$$

Diese Gleichung, welche schon von der willkürlichen Function befreit ist, muss mit der vorgelegten Differentialgleichung $dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_ndx_n$ identisch sein.

Diese Uebereinstimmung ist offenbar nothwendig, wenn wir an die ganze oben gegebene Darstellung der Integration von Differentialgleichungen in beliebig vielen Veränderlichen denken, zu denen auch unsere partielle Differentialgleichung zu rechnen ist. Wenn nämlich die Zahl der Veränderlichen in einer vorgelegten Differentialgleichung ungerade ist, dann folgt die erwähnte Uebereinstimmung oder Identität unmittelbar aus dem Früheren, da die Differentiation der ersten Integralgleichung, wenn man die Werthe aus den übrigen Gleichungen einsetzt, die vorgelegte Differentialgleichung selbst hervorbringt. Dasselbe gilt aber auch bei einer geraden Zahl von Veränderlichen, und zwar deshalb, weil die Differentialgleichung in $2n$ Veränderlichen in eine andere mit ihr vollkommen gleichwerthige in $2n-1$ Veränderlichen transformirt wird. Dies vorausgeschickt leitet man folgende identische Gleichungen ab:

$$\mathfrak{F}'_{k_1}=\mathfrak{F}_1,\quad \mathfrak{F}'_{k_2}=\mathfrak{F}_2,\quad \mathfrak{F}'_{k_3}=\mathfrak{F}_3,\quad\ldots,\quad \mathfrak{F}'_{k_{n-1}}=\mathfrak{F}_{n-1}.$$

Man kann daher die mit $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_{n-1}$ bezeichneten Functionen aus der ersten durch den Buchstaben $\mathfrak{F}$ dargestellten dadurch ableiten, dass man diese nach $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ differentiirt. Mithin lassen sich die Integralgleichungen in der folgenden einfachen Form schreiben:

$$1)\ \mathfrak{F}(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) = \psi(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}).$$

$$2)\quad \mathfrak{F}'_{k_1} = \psi'_{k_1}$$

$$3)\quad \mathfrak{F}'_{k_2} = \psi'_{k_2}$$

$$4)\quad \mathfrak{F}'_{k_3} = \psi'_{k_3}$$

. . . . .

$$n)\ \mathfrak{F}'_{k_{n-1}} = \psi'_{k_{n-1}}.$$

[**136**] Aus diesen Gleichungen kann man die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung sofort und unmittelbar in allgemeiner Form ableiten. Denn indem man die mit ψ bezeichnete willkürliche Function unbestimmt lässt, kann man von den $n+1$ Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n$, welche die vorgelegte Gleichung enthält, n Veränderliche durch die $(n+1)$-te und die $n-1$ unbestimmten Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ mit Hilfe jener Integralgleichungen ausdrücken. Solche allgemeinen Ausdrücke, die die willkürliche Function selbst enthalten, kann die frühere Form der Integralgleichungen nicht liefern. Denn aus diesen Gleichungen kann man die Grössen $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ erst dann eliminiren und dadurch die Gleichung zwischen den Veränderlichen $z, x_1, \ldots, x_n$ selbst ermitteln, wenn man an Stelle der mit ψ bezeichneten willkürlichen Function eine ganz bestimmte Function annimmt, was in jedem Falle nur eine particuläre Lösung als Resultat liefert.

Uebrigens lassen sich auf Grund der hier angegebenen einfacheren Form auch die Ableitungen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch dieselben n unbestimmten Grössen ausdrücken. Da nämlich die Gleichung $0 = dz \cdot \mathfrak{F}'_z + dx_1 \cdot \mathfrak{F}'_{x_1} + \cdots + dx_n \cdot \mathfrak{F}'_{x_n}$ mit der Gleichung $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$ identisch ist, so muss sein

$$p_1 = \frac{-\mathfrak{F}'_{x_1}}{\mathfrak{F}'_z}, \quad p_2 = \frac{-\mathfrak{F}'_{x_2}}{\mathfrak{F}'_z}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{-\mathfrak{F}'_{x_n}}{\mathfrak{F}'_z}.$$

Die Anwendung der oben auseinandergesetzten Methode auf Beispiele, die dieselbe mehr illustriren, verschiedene daraus hervorgegangene Beobachtungen, die Auseinandersetzung von specielleren Methoden, durch welche man gewisse Fälle leichter erledigen kann, (so auch eine etwas andere Methode partielle Differentialgleichungen in vier Veränderlichen zu integriren, auf die ich gekommen war, bevor ich die allgemeine auf beliebig viele Veränderliche bezügliche Methode gewonnen hatte), dies und anderes übergehe ich jetzt, damit diese Abhandlung nicht zu lang wird.

Anmerkungen.

Johann Friedrich Pfaff wurde am 22. December 1765 in Stuttgart geboren. Im Jahre 1788 erhielt er eine mathematische Professur in Helmstedt und wurde 1810 nach Halle berufen. Er starb am 21. April 1825. Die Zahl seiner mathematischen Publicationen ist nicht gross. Aber schon die eine Arbeit, welche in dem vorliegenden Bändchen zum ersten Male in deutscher Sprache wiedergegeben wird, sichert ihm für alle Zeiten einen Platz unter den grossen deutschen Mathematikern. In der That löst er hier als erster das Integrationsproblem der partiellen Differentialgleichungen in voller Allgemeinheit, ein Problem, an welchem so grosse Männer wie *Euler*, *Lagrange* und *Monge* vergeblich ihre Kräfte versucht hatten. Factisch leistet aber *Pfaff* in dieser Arbeit noch mehr. Er entwickelt darin eine Theorie der totalen Differentialgleichungen, die immer mit seinem Namen verknüpft bleiben wird. Hatte doch *Euler* solche Gleichungen, wenn sie nicht unbeschränkt integrabel sind, als absurd betrachtet und *Monge* nur in einem speciellen Sinne von ihrer Integration gesprochen. Das Problem, welches den Kern dieser Theorie bildet, das jetzt so genannte *Pfaff*'sche Problem, hat seit *Pfaff*'s Zeiten die hervorragendsten Mathematiker beschäftigt, unter denen wir nur *Jacobi*, *Clebsch*, *Frobenius*, *Lie* nennen wollen.

Wir wollen kurz zeigen, wie man von dem Integrationsproblem der partiellen Differentialgleichungen zu der Problemstellung *Pfaff*'s gelangt. In speciellen Fällen hatten schon *Euler* und *Lagrange* anstatt einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung

$$(1)\qquad p_1 = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n)$$

die totale Differentialgleichung

$$(2)\quad dz - \varphi(x_1, \cdots, x_n, z, p_2, \cdots, p_n)\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \cdots - p_n\, dx_n = 0$$

betrachtet. Ist $z = \omega(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung von (1), so ist Gleichung (2) eine Folge von

$$(3) \qquad \begin{cases} z - \omega(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ p_2 - \dfrac{\partial \omega}{\partial x_2} \qquad = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_n - \dfrac{\partial \omega}{\partial x_n} \qquad = 0 . \end{cases}$$

Hat umgekehrt ein System von n Gleichungen zwischen $x_1, \ldots, x_n$, z, $p_2, \ldots, p_n$ die Eigenschaft, dass aus ihm die Gleichung (2) folgt, und lässt es sich nach z, $p_2, \ldots, p_n$ auflösen, so hat diese Auflösung die Form (3) und ω ist eine Lösung von (1). Anstatt die allgemeinste Lösung von (1) zu suchen, d. h. die Gleichung (1) zu integriren, kann man sich also die Aufgabe stellen, das allgemeinste System von n Gleichungen zu bestimmen, welches die Gleichung (2) nach sich zieht, oder, wie man sagt, die Gleichung (2) in allgemeinster Weise durch ein System von n Gleichungen zu integriren. Zur Lösung dieses Problems gelangt nun *Pfaff* durch eine Reihe aufeinander folgender Transformationen der Gleichung (2), die sich bei jeder totalen Differentialgleichung ausführen lassen. Diese Transformationstheorie der totalen Differentialgleichungen ist *Pfaff*'s eigenste Leistung. Als Grundlage der ganzen Theorie ist der in § 17 der obigen Arbeit bewiesene Satz zu betrachten*), dass man einen Differentialausdruck

$$\Omega = Pdx + P'dx' + \cdots + P^{(n-1)}dx^{(n-1)},$$

wo die P Functionen der x sind, auf die Form

$$\Omega = \lambda(Qdy + Q'dy' + \cdots + Q^{(n-2)}dy^{(n-2)})$$

reduciren kann, sobald n eine gerade Zahl ist. Dabei sind λ, y, y', ... Functionen der x, und Q, Q', ... hängen nur von den y ab. Ist n ungerade, so lässt sich (wie *Pfaff* bemerkt) die obige Reduction, die wir mit (I) bezeichnen wollen, im allgemeinen nicht durchführen, wohl aber ist eine andere Reduction möglich. Man kann nämlich auf den Ausdruck

---

*) Ich folge hier der Darstellung, die *Gauss* in seiner Besprechung der *Pfaff*'schen Arbeit gegeben hat (Gött. gel. Anz. 1815 Juli 1).

$$P'dx' + P''dx'' + \cdots + P^{(n-1)}dx^{(n-1)}$$

wenn man x als constanten Parameter betrachtet, die Reduction (I) anwenden und ihn auf die Form

$$\lambda(Qd'y + Q'd'y' + \cdots + Q^{(n-3)}d'y^{(n-3)})$$

bringen, wo die y Functionen der x sind, aber bei der Operation d' die Grösse x als constant zu betrachten ist. Setzen wir also

$$P^* = P - \lambda\left(Q\frac{\partial y}{\partial x} + Q'\frac{\partial y'}{\partial x} + \cdots + Q^{(n-3)}\frac{\partial y^{(n-3)}}{\partial x}\right),$$

so können wir schreiben

$$\Omega = P^*dx + \lambda\Omega',$$

wo nun

$$\Omega' = Qdy + Q'dy' + \cdots + Q^{(n-3)}dy^{(n-3)}$$

ist. Diese Reduction des Ausdrucks Ω bezeichnen wir mit (II). Offenbar können wir auf Ω' wiederum die Reduction (II) anwenden und erhalten dadurch

$$\Omega = \overline{P}dx + \overline{Q}dy + \lambda'\Omega'',$$

wo Ω'' wiederum dem Verfahren (II) unterworfen werden kann, u. s. f. Jedenfalls gelingt es auf diese Weise, den Ausdruck Ω (unter Voraussetzung eines ungeraden n) auf die Form

$$Mdx + Ndy + \cdots$$

zu bringen, wo die Anzahl der Glieder gleich $\frac{1}{2}(n+1)$ ist. Diese Reduction bezeichnen wir mit (III). Nehmen wir jetzt wieder an, dass in Ω die Zahl n gerade ist, und führen wir zunächst durch (I) Ω in

$$\lambda(Qdy + \cdots + Q^{(n-2)}dy^{(n-2)})$$

über, so können wir auf den in Klammern stehenden Differentialausdruck die Reduction (III) anwenden und dadurch Ω selbst auf einen $\frac{n}{2}$-gliedrigen Differentialausdruck reduciren. Diese Reduction bezeichnen wir mit (IV). Dass sich jeder Differentialausdruck entweder nach (III) oder nach (IV) reduciren lässt, ist (wie *Gauss* sagt) »ein ebenso neuer wie wichtiger Lehrsatz, der sich zwar in der Abhandlung des Herrn *Pfaff* nicht ausdrücklich ausgesprochen findet, aber sich leicht aus

den dortigen Untersuchungen folgern lässt.« Die wirkliche Ausführung der Reductionen (III) und (IV) erfordert nach *Pfaff* die Integration einer ganzen Reihe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung, und es war späteren Mathematikern vorbehalten zu ermitteln, wie viele Integrationen hier unvermeidlich sind, eine Untersuchung, die wohl erst durch *Lie* zum Abschluss gebracht worden ist (vgl. *F. Engel*, das *Pfaff*'sche Problem, Leipz. Ber. 1896 p. 413).

Nach dem Obigen erledigt sich nun für *Pfaff* die Integration der partiellen Differentialgleichung (1) einfach dadurch, dass er auf die totale Differentialgleichung (2) die Reduction (IV) anwendet. Dadurch bringt er (2) auf die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n = 0\,,$$

wo die f und F Functionen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n$ sind, und hat jetzt diese Gleichung durch ein n-gliedriges Gleichungssystem zu integriren. Er begnügt sich mit einer Gattung von solchen Systemen, nämlich den folgenden

$$W(f_1, \cdots, f_n) = 0\,, \quad F_1 : F_2 : \cdots : F_n = \frac{\partial W}{\partial f_1} : \frac{\partial W}{\partial f_2} : \cdots : \frac{\partial W}{\partial f_n}\,,$$

wo W eine willkürliche Function ist.

Die Integration der Gleichung (1) ist hiermit zurückgeführt auf die einer Reihe von simultanen Systemen, die nur nacheinander integrirt werden können. Im Jahre 1839 bewies *Jacobi*, dass man nur das erste dieser Systeme zu integriren braucht, ein Resultat, zu welchem schon viel früher (1819) *Cauchy* gelangt war.

Ich sehe davon ab, weiter auf die *Pfaff*'sche Theorie und ihre Vervollkommnung durch seine Nachfolger einzugehen, und verweise den Leser auf das ganz ausgezeichnete Werk von *E. von Weber* (Vorlesungen über das *Pfaff*'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung), wo dieses Gebiet mit meisterhafter Klarheit und Gründlichkeit behandelt wird.

---

1) *Zu S. 3.* Die betreffende Arbeit *Lagrange*'s (Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre, Abhandlungen der Berliner Akademie 1772) ist zusammen mit derjenigen *Cauchy*'s aus dem Jahre 1819 in

deutscher Uebersetzung in Heft 113 der *Ostwald*'schen Klassiker erschienen.

2) *Zu S. 4.* Das Auftreten einer willkürlichen Function von zwei Argumenten folgt aus dem Wesen der *Lagrange*'schen Integrationstheorie. Ist $q = \varphi(x, y, z, p)$ die vorgelegte partielle Differentialgleichung, so sucht *Lagrange* (nach dem Vorgange *Euler*'s) p als Function von x, y, z so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$dz - p\,dx - \varphi(x, y, z, p)\,dy = 0$$

integrabel wird. Ihre ∞^1 Integralflächen sind dann zugleich Integralflächen der partiellen Differentialgleichung. *Lagrange*'s Methode besteht also darin, alle Scharen von ∞^1 Integralflächen zu suchen. Denken wir uns nun irgend eine Ebene (etwa $x =$ Const.) und beachten wir, dass im allgemeinen durch jede Curve dieser Ebene eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung hindurchgeht, so entspricht jeder Schar von ∞^1 Integralflächen eine Schar von ∞^1 Curven in jener Ebene und umgekehrt. Eine solche Curvenschar wird aber dargestellt durch eine Gleichung von der Form $z = f(y, c)$, wo f eine willkürliche Function der beiden Argumente y und c ist. In dieser einfachen Weise erklärt sich das *Lagrange*'sche Paradoxon. Das geistreiche Verfahren, welches er selbst in seinen Leçons sur la théorie des fonctions zur Beseitigung jener Schwierigkeit anwandte, ist aber insofern von Bedeutung gewesen, als es *Pfaff* zu seiner Theorie angeregt hat (vgl. die Bemerkung *Pfaff*'s am Ende von § 1 der obigen Arbeit).

3) *Zu S. 14.* Hier hätte sich *Pfaff* auf *Euler* und *Lagrange* berufen können, die beide diese Frage erledigt hatten.

4) *Zu S. 15.* *Pfaff* hat natürlich noch nicht unsere (von *Jacobi* herrührenden) Symbole für partielle Ableitungen. Er benutzt statt $\frac{\partial f}{\partial x}$ die Bezeichnung $d^x f$, welche wir überall durch die jetzt übliche ersetzt haben.

5) *Zu S. 55 ff.* Eine elegante Ableitung des *Pfaff*'schen Resultates gab *Jacobi* (*Crelle*'s Journal Bd. 2). Da *Pfaff* für den allgemeinen Fall die Formeln nicht wirklich aufgestellt hat, wollen wir die *Jacobi*'sche Betrachtung, welche nur die analytische Durchführung des *Pfaff*'schen Gedankenganges ist, hier wiedergeben. Vorgelegt sei die Gleichung

$$X_0\,dx_0 + X_1\,dx_1 + \cdots + X_p\,dx_p = 0\,.$$